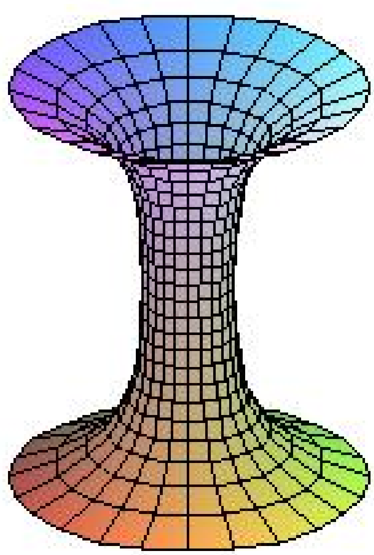
Potentiels isorésonants et symétries

par

Aymeric AUTIN

allocataire-moniteur à l'université de Nantes

(juin 2007)



S'adressant à un public de non-spécialistes, cette note de synthèse (en 9062 caractères Latex) est destinée à faire connaître les travaux effectués par son auteur en vue du doctorat en mathématiques, dans l'École doctorale EDSTIM, sous la direction du professeur Laurent Guillopé.

1 Introduction

Durant toute ma thèse, je me suis intéressé à des objets mathématiques qu'on appelle résonances. Ce terme est inspiré de la physique. En effet, on entend le plus souvent parler de résonances à propos d'instruments de musique, ou quand un chanteur accomplit l'exploit de briser un verre avec sa voix ou encore quand le vent détruit le pont de Tacoma. Les résonances qui me concernent sont reliées à ces exemples mais proviennent en fait de problèmes en physique quantique ou en diffusion électromagnétique.

L'étude des résonances ainsi donc que mon travail de thèse utilisent à la fois des outils d'analyse et de géométrie. En effet, les résonances sont définies à partir d'un opérateur, le laplacien, qu'on note Δ, et cet opérateur intervient dans l'équation qui décrit la propagation des ondes dans un milieu. J'utilise aussi des particularités du milieu, en mathématiques on dit variété, dans lequel je travaille, comme par exemple les symétries ou la courbure.

Je vais commencer par parler de valeurs propres, dont les résonances sont des généralisations, afin d'expliquer quels sont les problèmes qui nous intéressent puis ensuite je parlerai des résonances et des résultats de ma thèse.

2 Valeurs propres

Les valeurs propres d'un opérateur comme le laplacien décrivent les énergies des états bornés. Ce sont des états qui, sans perturbation, existent pour tout temps. On appelle spectre l'ensemble de toutes les valeurs propres d'un opérateur. Si on appelle M notre milieu et qu'on le suppose compact, c'est-à-dire qui ne s'étend pas infiniement, alors on a le résultat suivant,

Théorème 1
Le spectre du laplacien sur M compacte consiste en une suite de nombres réels positifs $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

La connaissance de ce spectre est importante. Par exemple, il permet de décrire les solutions de l'équation des ondes dans M.

Pour illustrer prenons pour M un fil de longueur L. L'équation des ondes où apparaît le laplacien est, avec t le temps et x la position,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \Delta u(t,x) = 0$$

avec les conditions $u(t,0) = u(t,L) = 0$ qui signifient que les extrémités du fil sont fixées. La solution de cette équation s'écrit

$$u(t,x) = \sum_{k\geq 1} a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t + \psi_k)\sin(\sqrt{\lambda_k}x),$$

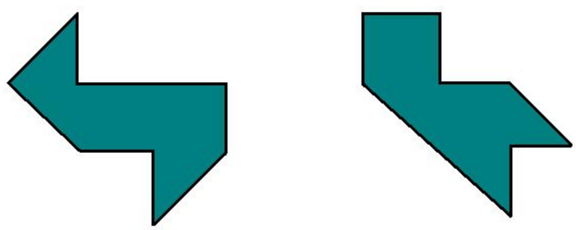
où a_k et ψ_k sont des constantes et $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2$ sont les valeurs propres du laplacien. On voit donc avec cet exemple que comme on sait calculer les valeurs propres du laplacien , on peut décrire comment les ondes vont se propager dans le fil.

Un autre exemple est celui du tambour. Dans ce cas M est la membrane du tambour qui vibre. Comme dans l'exemple précédent, si on connaît les valeurs propres du laplacien sur M alors on peut savoir comment les ondes se propagent sur la membrane. Ici les valeurs propres sont appelées fréquences propres ou harmoniques et le son produit par le tambour est une superposition de ces fréquences propres.

Dans le premier exemple, on a vu que les valeurs propres valaient $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2$. Donc si on connaît M et donc sa longueur L alors on peut calculer les valeurs propres. On dit que dans ce cas on a résolu le problème direct. Dans le deuxième exemple le problème direct consiste, connaissant la forme de la membrane M du tambour, à calculer le spectre et à en déduire le son produit.

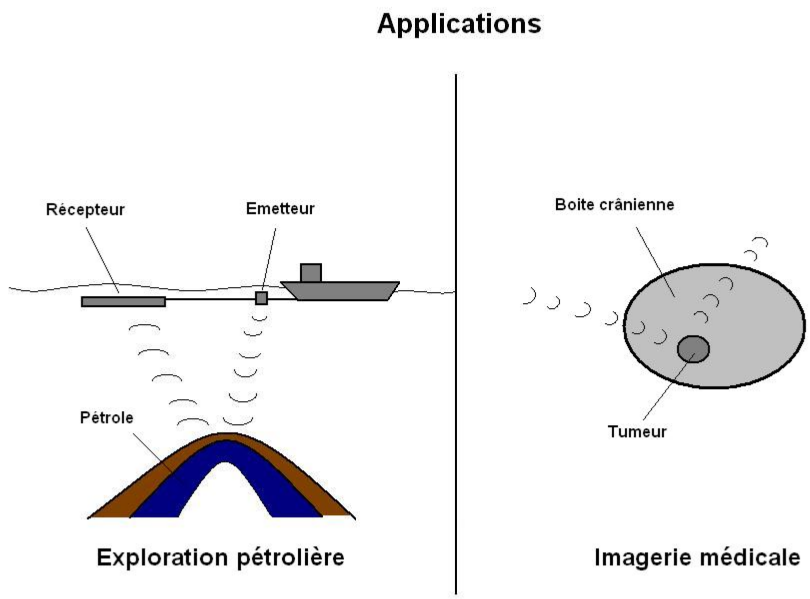
Réciproquement on définit le problème inverse, c'est-à-dire connaissant le son du tambour essayer d'en déduire la forme de la membrane. Autrement dit le problème inverse consiste à retrouver la géométrie de la variété à partir de la connaissance du spectre. Malheureusement on ne peut pas toujours résoudre ce problème. Par exemple, si on construit deux tambours avec des membranes de formes suivantes, ils produisent le même son et on ne pourra pas les distinguer :

Un contre exemple



Ces deux tambours produisent le même son

Par contre, il existe des réponses positives à certains problèmes inverses. Si on ajoute d'autres informations au spectre on peut reconstruire la géométrie du milieu. Ce genre de résultats a des applications concrètes. En cosmologie on étudie le spectre des étoiles. Il s'agit aussi de valeurs propres qui permettent en observant la lumière émise par une étoile d'en connaître la composition chimique. En imagerie médicale, en envoyant des rayons X sur une tumeur et en observant comment ils se propagent on peut reconstruire la géométrie de la tumeur. Ou encore, en recherche pétrolière on peut envoyer des ondes sur un sous-sol, regarder comment elles se réfléchissent et en déduire s'il y a des cavités susceptibles de contenir du pétrole.



3 Résonances

On a dit que les spectres décrivent les énergies des états bornés. Mais ces états ne correspondent pas toujours à la réalité physique. On observe souvent dans la nature des phénomènes dont l'amplitude décroît. La perte d'énergie est due soit au frottements, soit à un échappement à l'infini quand la variété n'est pas compacte. Pour décrire ces situations, on utilise une généralisation des valeurs propres que sont les résonances.

Afin de justifier l'intérêt des résonances, montrons comment elles interviennent en physique quantique par exemple. Si λ un nombre complexe, est une résonance du laplacien, Δ, on appelle état résonant une solution ϕ de l'équation $\Delta\phi = \lambda\phi$. Alors $u(t,x) = e^{-i\lambda t}\phi(x)$ est une solution de l'équation de Schrödinger

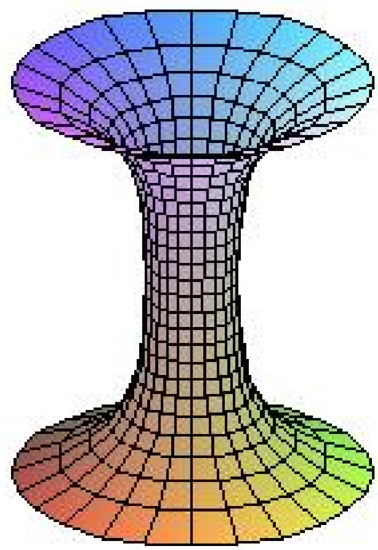
$$i\frac{\partial u}{\partial t}u(t,x) = \Delta u(t,x).$$

Cette équation décrit l'évolution dans le temps d'une particule. On voit que l'amplitude de la solution décroît comme $e^{\mathrm{Im}\lambda\, t}$ où $\mathrm{Im}\lambda$ est la partie imaginaire de la résonance λ. On peut donc remarquer que ce sont les résonances de faible partie imaginaire qui correspondent aux états les plus significatifs, ceux qu'on peut détecter le plus longtemps. On a aussi que la solution u oscille comme $e^{-i\mathrm{Re}\lambda\, t}$ où $\mathrm{Re}\lambda$ est la partie réelle de la résonance.

Le travail de ma thèse est d'étudier comment varient les résonances quand on ajoute un potentiel V au laplacien. On peut penser à un potentiel électrique ou magnétique. C'est-à-dire que mon but est de comparer les résonances de Δ tout seul avec celles de $\Delta + V$.

Pour être précis j'ai cherché des potentiels tels que $\Delta + V$ ait les mêmes résonances que le laplacien seul. On dit que ces potentiels sont isorésonants. Ces potentiels sont des obstructions au problème inverse de ce cadre. Ici le problème inverse consiste à retrouver le potentiel à partir des résonances. Les potentiels que j'ai trouvés ne modifiant pas les résonances sont donc indétectables.

La géométrie a un rôle très important dans la construction de mes potentiels. J'utilise notamment le fait que la variété doit avoir des symétries de type circulaire ou sphérique. On peut dire, pour mieux se faire une idée, que les variétés doivent être invariantes par rotations. De plus les variétés sur lesquelles je travaille ont parfois une géométrie non euclidienne. On dit alors que l'espace a une courbure non nulle, qu'il n'est pas plat. Pour illustrer, voici un exemple sur lequel je travaille : la caténoïde



Enfin on peut signaler que les résonances interviennent également dans des phénomènes de diffusion. Pour fixer les idées, c'est la diffusion qui explique la couleur bleue du ciel. En effet les particules de diazote majoritaires dans l'atmosphère diffusent la couleur bleue de la lumière solaire. Cela explique aussi la couleur orangée du soleil au lever et au coucher : la lumière reçue a traversé une grande couche d'atmosphère et s'est appauvrie en bleu. Ce phénomène de diffusion intervient beaucoup dans la compréhension des trous noirs. Là aussi la géométrie est très importante. Au voisinage des trous noirs l'espace est tordu et la géométrie devient non euclidienne.

Dans cette synthèse destinée au grand public, je ne suis volontairement pas rentré dans les détails. Pour le lecteur mathématicien que ce domaine intéresse, j'indique ma page web personnelle où il trouvera une synthèse (destinée à la journée des doctorants 2006) plus précise contenant quelques références : http ://www.math.sciences.univ-nantes.fr/∼ autin/.