Que peuvent nous apprendre les spectres ?

Aymeric AUTIN

Séminaire du Lycée Clémenceau, 11 mars 2008.

1 Problèmes inverses sur les variétés compactes

1.1 Premier exemple : la corde vibrante

Cherchons d'abord à énoncer le problème dans le cas de la dimension 1. Pour illustrer notre propos intéressons nous à la situation physique dite de "la corde vibrante" :

La position de la corde donnée par sa hauteur $u(t,x)$ à l'abcisse x et au temps t est régie par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \tag{1}$$

où on a pris les constantes physiques (tension, vitesse de propagation) égales à 1. On ajoute les conditions au bord de Dirichlet :

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Dans l'équation (1) apparaît l'opérateur **laplacien** défini sur les fonctions au moins C^2 sur $M := [0,L]$ qui s'annulent en 0 et L :

$$\begin{aligned} \Delta : C^2(M) &\to C^0(M) \\ v &\to -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Cherchons les éléments propres (valeurs propres et fonctions propres) de cet opérateur. On cherche à résoudre le problème suivant avec $v \in C^2(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \Delta v &= \lambda v, \\ v(0) &= v(L) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda v &= 0, \\ v(0) = v(L) &= 0. \end{cases}$$

On voit que pour avoir l'existence d'une solution il faut que λ soit positif et dans ce cas on obtient une infinité de solutions indexées par $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_k(x) &= A_k \sin(\sqrt{\lambda_k} x), \ A_k \in \mathbb{R} \\ \lambda_k &= (\frac{k\pi}{L})^2. \end{cases}$$

Définition 1
*On appelle **spectre** de Δ et on note $\mathrm{Spec}(\Delta)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\Delta - \lambda$ n'est pas inversible.*

Remarque 1
En dimension finie il n'y a que des valeurs propres dans le spectre d'un opérateur (ie une matrice) car ne pas être inversible équivaut à ne pas être injectif. Mais ce n'est plus le cas en dimension infinie où, a priori, il peut y avoir des points dans le spectre qui ne sont pas des valeurs propres.

Néanmoins dans notre exemple, Spec(Δ) est uniquement constitué de la suite des valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (cf théorème 1 du cas compact général). Usuellement les $(\sqrt{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont appelées les fréquences propres et les $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont les harmoniques correspondantes.

Comme dans le cas de la dimension finie, les fonctions propres de notre opérateur Δ forment une "base" (notion à préciser en dimension infinie : ici en fait on peut (doit) travailler dans $L^2(M)$ et il s'agit de la notion de base hilbertienne) de l'espace de fonctions dans lequel on travaille. On peut alors chercher à décomposer les solutions de l'équation des ondes (1) dans cette "base". On cherche u de la forme

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(t) \sin(\sqrt{\lambda_k} x),$$

et en reportant dans (1) on obtient

$$A_k(t) = a_k(\sqrt{\lambda_k} t + \psi_k),$$

où les a_k et les ψ_k sont des constantes qui dépendent uniquement de donnée initiale u au temps $t = 0$.

Venons en au problème qui nous intéresse vraiment. Dans cet exemple on voit que la connaissance de M, c'est-à-dire du paramètre L, permet de calculer le spectre du laplacien (ce sont les $(\frac{k\pi}{L})^2$) : c'est ce qu'on appelle le **problème direct**.

$$\boxed{\text{Problème direct : connaissance de } M \Longrightarrow \text{connaissance de Spec}(\Delta)}$$

Le problème réciproque est aussi vrai dans le cas de la dimension 1. Si on connaît le spectre du laplacien (même une seule valeur propre non nulle suffirait), alors on peut retrouver le paramètre L qui ici détermine M. C'est ce qu'on appelle le **problème inverse**.

$$\boxed{\text{Problème inverse : connaissance de Spec}(\Delta) \Longrightarrow \text{connaissance de } M}$$

1.2 Deuxième exemple : le tambour

Regardons ce qui se passe en dimension 2 avec l'exemple du tambour. On considère donc une membrane vibrante Ω de bord $\partial\Omega$ fixé :

La position de la membrane $u(t,x,y)$ au dessus du point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ au temps t est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x,y) + \Delta u(t,x,y) = 0, \tag{2}$$

où le laplacien dans $\mathbb{R}^2$ est l'opérateur $\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$. On ajoute les conditions de bord

$$u(t,.)_{|\partial\Omega} = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Dans cet exemple le laplacien a encore un spectre constitué uniquement d'une suite de valeurs propres strictement positives (cf théorème 1). Les racines de ces valeurs propres sont les fréquences propres du tambour, c'est-à-dire que cette suite de valeurs propres détermine le son produit pas le tambour.

Le problème inverse est le suivant :

$$\boxed{\text{Problème inverse : si je connais Spec}(\Delta)\text{, alors est-ce que je peux retrouver la forme de } \Omega\,?}$$

Cette question a été soulevée par Kac en 1966 sous la forme : peut-on entendre la forme d'un tambour ? Bien sûr deux tambours isométriques (= images l'un de l'autre par une isométrie de $\mathbb{R}^2$) produisent le même son donc le problème inverse n'a de sens qu'à isométrie près.

La réponse à ce problème inverse a été donnée par Gordon et Webb en 1966 et c'est NON. Les deux contre-exemples les plus connus sont "cocotte" et "flèche" :

En fait on a Spec(Δ_{Ω_1}) = Spec(Δ_{Ω_2}) mais Ω_1 et Ω_2 ne sont pas isométriques. On ne peut donc pas retrouver la forme de Ω juste en connaissant le spectre du laplacien dessus.

1.3 Cas général des variétés riemanniennes compactes

On va généraliser l'étude du problème inverse spectral du laplacien en dimension plus grande.

1.3.1 Variété et espace tangent

On commence par définir ce qu'est une variété différentielle. Soit M un espace topologique de dimension n. On va avoir besoin de la notion d'**atlas**,

DÉFINITION 2
Un atlas (C^∞) sur M est la donnée :
i) d'un recouvrement de M par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$.
ii) d'une famille d'homeomorphismes $\phi_i : U_i \to \Omega_i$, $i \in I$, où les Ω_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On doit avoir de plus, pour tout $(i,j) \in I^2$, l'homeomorphisme $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ doit être un C^∞ difféomorphisme de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

REMARQUE 2
*Une paire (U_i, ϕ_i) est appelée **carte**.*

On dit que deux atlas sont **équivalents** si leur union est encore un atlas. Alors on a

DÉFINITION 3
Un espace topologique M est une variété différentielle (C^∞) si M est muni d'une classe d'équivalence d'atlas (C^∞).

Cela veut juste dire que localement (au voisinage de tous ses points) M ressemble à $\mathbb{R}^n$ (elle est bien lisse).

Exemples :
- $\mathbb{R}^n$ est bien sûr une variété différentielle ; il suffit de prendre pour les ϕ_i l'identité.
- La sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Si on note N et S deux points de $\mathbb{S}^n$ antipodaux, on peut prendre comme ouverts de cartes $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et pour ϕ_1 et ϕ_2 les projections stéréographiques de centre N et S respectivement :

On définit ensuite la notion d'espace tangent en un point d'une variété différentielle.

DÉFINITION 4
Soit M une variété différentielle de dimension n qu'on suppose incluse dans $\mathbb{R}^p$, $p > n$ et m un point de M. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ est dit tangent à M en m s'il existe une courbe $c : \mathbb{R} \to M$ telle que $c(0) = m$ et $c'(0) = v$. L'ensemble de tous les vecteurs tangents à M en m est un espace vectoriel de dimension n appelé espace tangent à M en m et noté T_mM.

REMARQUE 3
On a considéré M comme sous-variété de $\mathbb{R}^p$ pour simplifier la définition d'espace tangent. En effet dans ce cadre la dérivée de c se comprend comme la différentielle d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Mais en fait on peut définir l'espace tangent d'une variété abstraite de manière intrinsèque c'est juste un peu plus compliqué.

1.3.2 Métrique riemannienne

DÉFINITION 5
Une métrique riemannienne sur une variété différentielle M est la donnée en tout point $m \in M$ d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (un produit scalaire quoi !) $g_m : T_mM \times T_mM \to \mathbb{R}$ telle que l'application $m \to g_m$ soit C^∞.

Remarque 4
La géométrie riemannienne a été initiée par Gauss pour les surfaces puis par Riemann pour la dimension quelconque, tout ça au milieu du 19^e siècle. Ce formalisme a notamment servi à Einstein pour décrire la relativité générale.

Du produit scalaire on tire une norme et donc une manière de mesurer les distances sur M. Par exemple la longueur d'une courbe $c : [0, T] \to M$ est donnée par

$$L(c) = \int_0^T g_{c(t)}(c'(t), c'(t))^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t.$$

Ensuite toute une théorie en découle : on peut définir les plus court chemins qui relient deux points, ce sont les géodésiques ; puis la notion de courbure, ...

Ce qui nous intéresse ici c'est qu'à chaque fois qu'on se donne une métrique riemannienne sur M, on peut définir un opérateur laplacien correspondant qu'on notera Δ_g. Soit (U, ϕ) une carte autour de $m \in M$, alors $U \subset M$ est muni via ϕ de coordonnées qui sont les applications composantes de $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. Notons les $(x_1, \ldots, x_n)$. De même, la base canonique de $\mathbb{R}^n$, fournit via la différentielle de ϕ^{-1} une base de $T_m M$ qu'on va noter $(e_1, \ldots, e_n)$. On peut alors parler de la matrice (symétrique bien sûr) de g_m dans cette base qu'on notera $g_m = [g_{ij}(m)]_{1 \leq i,j \leq n}$ où $g_{ij}(m) = g_m(e_i, e_j)$. On peut donc parler de son déterminant (non nul) $\det(g_m)$ et de sa matrice inverse g_m^{-1}.

Définissons alors le laplacien d'une fonction f différentiable sur M à valeurs scalaires :

$$\Delta_g f(m) = -\frac{1}{\det(g_m)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\det(g_m)^{\frac{1}{2}} (g_m^{-1})_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big)(m),$$

où il faut comprendre les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big)(f \circ \phi^{-1})(\phi(m)).$$

Donnons deux exemples de métriques et de laplaciens correspondants.

- Commençons par le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. La métrique euclidienne est donnée en tout point dans la base canonique par la matrice identité :

$$\forall m \in \mathbb{R}^2, \quad g_m^{euclid} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Donc tout calcul fait on retrouve le laplacien dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, (x, y) :

$$\Delta_{g^{euclid}} = -\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big).$$

- Considérons l'espace hyperbolique de dimension 2, $\mathbb{H}^2$, décrit comme le demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $y > 0$ muni de la métrique riemannienne :

$$g_{(x,y)}^{hyp} = \frac{g_{(x,y)}^{euclid}}{y^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

  On trouve alors pour le laplacien qui contrairement au cas euclidien dépend du point de $\mathbb{H}^2$ auquel on se trouve :

$$\Delta_{g^{hyp}}(x, y) = -y^2 \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big).$$

1.3.3 Théorie spectrale

Le fait de munir une variété M de dimension n d'une métrique riemannienne g fournit un élément de volume sur M : $\mathrm{d}vol_g = \sqrt{\det g}\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées sur M. On peut donc définir un calcul intégral sur M ainsi que l'espace $L^2(M, g)$ des fonctions de carré intégrable. Sur cet espace on peut introduire le produit scalaire suivant

$$\langle f, h \rangle = \int_M f(m)\overline{h(m)}\ \mathrm{d}vol_g(m),\ \ (f, h) \in L^2(M, g)^2.$$

On peut alors vérifier (en faisant des intégrations par parties : formule de Green) que le laplacien, Δ, est symétrique pour ce produit scalaire, c'est-à-dire que pour toutes $(f, h) \in L^2(M, g)^2$ on a :

$$\langle \Delta f, h \rangle = \langle f, \Delta h \rangle.$$ [1]

On retrouve alors pour le laplacien l'équivalent en dimension infinie du théorème de diagonalisation des matrices symétriques de la dimension finie.

Théorème 1
Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe à bord ∂M régulier. On considère le laplacien Δ sur M avec les conditions de Dirichlet (i.e. annulation des fonctions sur ∂M). Il a pour spectre une suite de valeurs propres positives qui tend vers $+\infty$,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

On note $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les fonctions propres correspondantes (i.e. $\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k$ et $\phi_{k|\partial M} = 0$). Les $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une "base hilbertienne" de $L^2(M, g)$.

On peut alors généraliser les problèmes spectraux direct et inverse qu'on a déjà étudié en dimension 1 et 2 :

$$\boxed{\text{Problème direct : connaissance de } (M, g) \overset{?}{\Longrightarrow} \text{connaissance de } \mathrm{Spec}(\Delta_g)}$$

Le problème direct n'est pas facile en général. Il y a très peu de variétés riemanniennes compactes sur lesquelles on sait calculer le spectre du lapalcien (essentiellement les sphères et tores).

$$\boxed{\text{Problème inverse : connaissance de } \mathrm{Spec}(\Delta_g) \overset{?}{\Longrightarrow} \text{connaissance de } (M, g)}$$

On a vu qu'en dimension 1 on pouvait résoudre le problème inverse mais que par contre dès la dimension 2 la réponse était négative (cf cocotte et flèche).

En fait, en modifiant un peu l'énoncé du problème inverse c'est-à-dire en ajoutant à la connaissance de $\mathrm{Spec}(\Delta_g)$ d'autres informations, on peut avoir une réponse positive c'est-à-dire déterminer (M, g).

Théorème 2
Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe à bord ∂M non vide. Alors les données spectrales

$$\{\partial M\ ,\ \{\lambda_k, N.\phi_{k|\partial M}\}_{k\in\mathbb{N}}\},$$

déterminent uniquement M et sa métrique g. On a noté N la normale extérieure au bord de M et $N.\phi_k$ est la différentielle de la k-ième fonction propre du laplacien appliquée à N.

Ce théorème est dû à Katchalov, Kurylev et Lassas et il date de 2000. On peut comprendre ce théorème de la façon suivante : en connaissant juste le bord de la variété et comment ce bord réagit quand on lui envoie une "onde", on peut tout savoir sur l'intérieur de la variété. Les applications pratiques possibles sont nombreuses, on peut penser à l'imagerie médicale ou encore la recherche de nappes prétrolifères...

[1] le lecteur attentif aura remarqué qu'il faut d'autres hypothèses sur f et h pour pouvoir écrire ce calcul. Notamment il faut que Δf et Δh soient dans L^2. Il faudrait parler d'opérateur non borné et d'espaces de Sobolev pour faire les choses proprement...

2 Cas des variétés non compactes

Si la variété n'est plus compacte, on ne peut plus appliquer le théorème 1 et le spectre du laplacien est encore réel positif mais n'est plus discret a priori. Par exemple, si $M = \mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne, on a $\mathrm{Spec}(\Delta) = [0, +\infty[$. Dans le cas compact, on pouvait, dans les applications, faire des approximations en ne considérant que les premières valeurs propres. Ce n'est plus possible avec un spectre non dénombrable. On aimerait donc définir, toujours à partir du laplacien, de nouvelles données spectrales discrètes.

Pour cela revenons à la définition du spectre du laplacien. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(\Delta)$, on peut définir $F(z) := (\Delta - z)^{-1}$ qu'on appelle la **résolvante du laplacien**. On peut démontrer que l'application $z \to F(z)$ est holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-dérivable) sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(\Delta)$. Le spectre du laplacien correspond aux pôles de cette application F.

Pour certaines variétés, quitte à changer le paramètre z on peut obtenir un unique prolongement méromorphe (c'est-à-dire un quotient de fonctions holomorphes) de $\lambda \to (\Delta - f(\lambda))^{-1}$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. Ses pôles sont alors isolés et on les appelle RÉSONANCES et on note leur ensemble $\mathrm{Res}(\Delta)$. Ce sont ces résonances qui vont jouées le rôle de données spectrales discrètes du laplacien.

Par exemple, pour $\mathbb{R}^n$ euclidien, $\lambda \to (\Delta - \lambda^2)^{-1}$ a priori définie sur $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ (car $\mathrm{Spec}(\Delta) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}\lambda = 0\}$) se prolonge de manière holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier (dans ce cas il n'y a donc pas de pôle et donc $\mathrm{Res}(\Delta) = \emptyset$).

Quels sont les problèmes inverses correspondant à cette situation non compacte ? On ne peut pas espérer déterminer la variété M et sa métrique grâce à la donnée des résonances. Car pour pouvoir construire les résonances, c'est-à-dire pour savoir si on peut prolonger la résolvante méromorphiquement, il faut déjà connaître la variété et sa métrique. Par contre si on sait déjà que la résolvante du laplacien se prolonge méromorphiquement, on peut considérer des potentiels (i.e. des fonctions) V qui sont nuls en dehors d'un compact de M et alors $\lambda \to (\Delta + V - f(\lambda))^{-1}$ se prolonge aussi méromorphiquement et on peut donc définir les résonances de $\Delta + V$ qu'on note $\mathrm{Res}(\Delta + V)$.

Remarque 5

Donnons une applications des résonances en lien avec la physique quantique. En physique quantique, l'équation de Schrödinger (1925) remplace le principe fondamental de la dynamique en décrivant l'évolution dans le temps d'une particule non relativiste :

$$i\frac{\partial u}{\partial t}u(t,x) = (\Delta + V)u(t,x).$$

Si $\lambda \in \mathrm{Res}(\Delta + V)$ alors il existe une solution ϕ (dépendant que de x) de $(\Delta + V)\phi = \lambda\phi$ (équivalent des vecteurs propres) et alors $u(t,x) = e^{-i\lambda t}\phi(x)$ est une solution de l'équation de Schödinger.

On s'intéresse alors au problème suivant :

$$\boxed{\text{Problème inverse : connaissance de } \mathrm{Res}(\Delta + V) \overset{?}{\Longrightarrow} \text{connaissance de } V}$$

Le but de ma thèse est de trouver un équivalent de "'cocotte et flèche"' pour ce problème inverse. C'est-à-dire trouver des potentiels V non nuls tels que $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$. Ces potentiels ne sont pas détectables avec juste la données des résonances. On appelle ces potentiels isorésonants.

Décrivons rapidement l'idée sous-jacente à la constrction de tels potentiels. Considérons le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$. Pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on peut écrire sa série de Fourier en θ (la convergence a lieu dans l'espace $L^2([0, 2\pi])$) :

$$u(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(r)e^{ik\theta}, \quad u_k \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Cela veut dire que l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ se décompose comme une somme directe orthogonale (pour le produit scalaire L^2) d'espaces de la forme $L^2(\mathbb{R}^+) \times e^{ik\theta}$. On écrit

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L^2(\mathbb{R}^+) \times e^{ik\theta}.$$

Dans la suite on appelera $E_k := L^2(\mathbb{R}^+) \times e^{ik\theta}$. Revenons au lapalcien du plan euclidien, en coordonnées polaires il s'écrit

$$\Delta = -\big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\big).$$

On peut calculer

$$\Delta\big(u_k(r)e^{ik\theta}\big) = \big(-u_k''(r) - \frac{1}{r}u_k'(r) + \frac{k^2}{r^2}u_k(r)\big)e^{ik\theta}.$$

Donc le laplacien stabilise chacun des espaces vectoriels E_k.

Prenons $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et $V(r,\theta) = v(r)e^{im\theta}$ avec v une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ nulle en dehors d'un compact. Regardons comment la mutiplication par V transforme les espaces E_k :

$$V(r,\theta)u_k(r)e^{ik\theta} = v(r)u_k(r)e^{i(k+m)\theta}.$$

Le potentiel V crée donc un décalage : il envoie E_k sur E_{k+m}. Si on regarde l'opérateur $\Delta + V$ comme une matrice infinie (attention il s'agit de comprendre l'idée de la preuve, ce n'est pas la bonne manière de considérer ces opérateurs pour faire des preuves rigoureuses) qu'on écrit par bloc en suivant la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^2)$ selon les espaces E_k :

On voit que V n'intervient que sur une sur-diagonale et donc a priori ne va pas changer les éléments spectraux du laplacien, c'est-à-dire les résonances.

En fait, géométriquement c'est la symétrie par rotations de centre O de $\mathbb{R}^2$ qui est importante. On peut donc généraliser cette construction de potentiels isorésonants à d'autres variétés qui ont des symétries. Comme avec "'cocotte et flèche"' on peut détecter ces potentiels si on ajoute d'autres données aux résonances.