Potentiels isorésonants et symétries.

Aymeric AUTIN

Laboratoire de mathématiques Jean Leray
Université de Nantes

24 octobre 2008

Plan

Hypothèses et définition

Hypothèse $A_{N,\rho}$: $R_0(\lambda) := (\Delta - f(\lambda))^{-1}$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine non borné D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Hypothèse $B_{N,\rho}$: $R_V(\lambda) := (\Delta + V - f(\lambda))^{-1}$ admet un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Définition

V est isorésonant si $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec les mêmes multiplicités.

Hypothèses et définition

Hypothèse $A_{N,\rho}$: $R_0(\lambda) := (\Delta - f(\lambda))^{-1}$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine non borné D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Hypothèse $B_{N,\rho}$: $R_V(\lambda) := (\Delta + V - f(\lambda))^{-1}$ admet un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Définition

V est isorésonant si $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec les mêmes multiplicités.

Hypothèses et définition

Hypothèse $A_{N,\rho}$: $R_0(\lambda) := (\Delta - f(\lambda))^{-1}$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine non borné D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Hypothèse $B_{N,\rho}$: $R_V(\lambda) := (\Delta + V - f(\lambda))^{-1}$ admet un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Définition

V est isorésonant si $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec les mêmes multiplicités.

Un résultat antérieur

Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:
$(r, \theta, x') \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^{n-2}$.

Théorème (T. Christiansen, 2006, 2008)

- *Soient $V_1 \in L^\infty_c(\mathbb{R}_+)$, $V_2 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^{n-2})$, et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors*

$$V(r, \theta, x') = V_1(r) V_2(x') e^{im\theta}$$

est isorésonant, i.e. $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta) = \emptyset$.

- *Les potentiels suivants sont aussi isorésonants :*

$$V(r, \theta, x') = \sum_{m=1}^{\infty} V_1^m(r) V_2^m(x') e^{im\theta}.$$

Symétrie $\mathbb{S}^1$

Action de $\mathbb{S}^1$ sur X induit une représentation unitaire de $\mathbb{S}^1$ sur $L^2(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & U(L^2(X)) \\ e^{i\theta} & \longrightarrow & f \to (x \to f(e^{-i\theta}.x)). \end{array}$$

Décomposition de $L^2(X)$ en composantes isotypiques :

$$L^2(X) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}^{\perp} L^2_j(X)},$$

où, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$L^2_j(X) := \{f \in L^2(X)\,;\, \forall\theta \in [0, 2\pi],\ pp{-}x \in X,\ f(e^{-i\theta}.x) = e^{ij\theta} f(x)\},$$

est l'espace des fonctions $\mathbb{S}^1$-homogènes de poids j.

Décalage pour une symétrie $\mathbb{S}^1$

Lemme

- $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta : L^2_j(X) \cap H^2(X) \to L^2_j(X)$
- *Si* $V \in L^\infty(X)$ *est* $\mathbb{S}^1$*-homogène de poids* $m \in \mathbb{Z}$*, alors :*

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V : L^2_j(X) \to L^2_{j+m}(X)$$

$\mathbb{S}^1$: Énoncé du résultat

Théorème

Soit (X, g) une variété riemannienne qui possède une action isométrique de $\mathbb{S}^1$. On suppose qu'il existe $N > 0$ et une fonction ρ, $\mathbb{S}^1$-invariante, tels que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ soit vérifiée sur un domaine D_N^+.

Si $V \in L_c^\infty(X)$ est $\mathbb{S}^1$-homogène de poids $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

alors, sur D_N^+, $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ et les multiplicités coïncident.

$\mathbb{S}^1$: Exemples de potentiels isorésonants

Espace euclidien : $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^2)^k \times \mathbb{R}^{n-2k}$,

$$\text{Action de } \mathbb{S}^1 \; : \; \bigoplus_{i=1}^{k} R(p_i\theta) \oplus Id_{\mathbb{R}^{n-2k}},$$

où $\theta \in [0, 2\pi)$, $(p_1, \ldots, p_k) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^k$, et $R(\phi)$ est la rotation d'angle ϕ sur $\mathbb{R}^2$.

Les potentiels $\mathbb{S}^1$-homogènes de poids m sont de la forme :

$$V_m(r_1 e^{i\alpha_1}, \ldots, r_k e^{i\alpha_k}, z) = W(\bar{x}) e^{i\ell_1\alpha_1} \ldots e^{i\ell_k\alpha_k},$$

où $(r_1 e^{i\alpha_1}, \ldots, r_k e^{i\alpha_k}, z) \in (\mathbb{R}^2)^k \times \mathbb{R}^{n-2k}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n/\mathbb{S}^1$ et

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_i p_i = -m$$

Estimations du bas du spectre sur les espaces de symétries

Lemme

Soit K une variété compacte à bord possédant une action de $\mathbb{S}^1$ et munie d'une métrique g telle que :

- *l'action de $\mathbb{S}^1$ soit isométrique,*
- *g puisse s'écrire comme une métrique produit dans un voisinage du bord de K.*

Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad C_1 j^2 \leq \mathrm{Min\ Spec}\ \Delta_{L^2_j(K)} \leq C_2(1 + j^2)$$

Majoration de la résolvante sur les espaces de symétries

Lemme

Soit $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ *et* $\chi \in C_c^\infty(X)$ $\mathbb{S}^1$*-invariante.*
Il existe une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \| \chi R_0(\lambda) P_j \chi \| \leq \frac{C}{1 + j^2}$$

Hypothèse supplémentaire pour l'action de $SO(n)$

Hypothèse C : l'action isométrique de $SO(n)$ sur X admet un point fixe O tel que, en O, les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme entre $X \setminus \{O\}$ et $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$.

d'où

$$L^2(X) = L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(\mathbb{S}^{n-1}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k \right)$$

$$H^k = \mathrm{Ker} \left(\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} - k(k+n-2) \right)$$

Décalage pour une symétrie $SO(n)$

$$H^k = \bigoplus_{w_{min} \preceq w \preceq w_{max}} H^k_w$$

$$H^k_{max} = \mathbb{R} v^k_{max}$$

$$v^k_{max} = (x_1 + ix_2)^k$$

$$L^2(X)^+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{max} \right)$$

Lemme

Pour tout $s \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et pour tous $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$s v^k_{max} : L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^\ell_{max} \to L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^{\ell+k}_{max}$$

$SO(n)$: Énoncé du résultat

Théorème

Soit (X, g) une variété riemannienne possédant une action isométrique de $SO(n)$ et vérifiant l'hypothèse C. On suppose aussi que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ est vérifiée.

Prenons, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $V \in L^\infty_c(X) \cap L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^m_{max}$, i.e.

$$V(r, \omega) = s(r) v^m_{max}(\omega), \; (r, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}, s \in L^\infty_c(\mathbb{R}^+).$$

Alors, sur D^+_N, $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ et les multiplicités coïncident.

Potentiels isorésonants sur la caténoïde

Théorème

Soient $(X, g) = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathrm{d}r^2 + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\alpha^2)$ *la caténoïde et* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Soit $V \in L^\infty_c(X)$ *donné par*

$$V(r, e^{i\alpha}) = V_m(r)e^{im\alpha}, \ (r, e^{i\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \ V_m \in L^\infty_c(\mathbb{R}).$$

Alors $z \to (\Delta + V - z)^{-1}$ *admet un prolongement méromorphe fini de* $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im} z < 0\}$ *sur* $D^+ := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta_0\}$ *à valeurs dans les opérateurs bornés de* $L^2_c(X)$ *dans* $H^2_{loc}(X)$.

De plus, sur D^+, *on a* $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ *avec les mêmes multiplicités.*

Un exemple de croissance de l'ordre

Proposition

Sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un potentiel V appartenant à

$$\mathcal{F} := \{V_m(r)e^{im\theta}\ ;\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ V_m \in L^\infty_c(\mathbb{R}^+)\}$$

tel que $-k$ soit une résonance de $\Delta + V$ d'ordre strictement plus grand que 1.

Perspectives

- Comprendre les modifications de l'ordre par les potentiels isorésonants.
- Peut-on construire des potentiels isorésonants sur des variétés sans symétrie ?
- Comprendre les liens entre résonances et symétries (localisation, estimations sur le nombre . . .)

Bibliographie

- **Agmon**, Shmuel : A perturbation theory of resonances. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1998.
- **Christiansen**, Tanya : Schrödinger operators with complex-valued potentials and no resonances. *Duke Math. J.*, 2006.
- **Christiansen**, Tanya : Isophasal, isopolar, and isospectral Schrödinger operators and elementary complex analysis. *Amer. J. Math.*, 2008.
- **Colin de Verdière**, Yves : Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Duke Math. J.*, 1979.
- **Guillarmou**, Colin : Meromorphic properties of the resolvent on asymptotically hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 2005.
- **Guillemin**, Victor et **Uribe**, Alejandro : Spectral properties of a certain class of complex potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983.
- **Mazzeo**, Rafe R. et **Melrose**, Richard B. : Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, 1987.
- **Wunsch**, Jared et **Zworski**, Maciej : Distribution of resonances for asymptotically Euclidean manifolds. *J. Differential Geom.*, 2000.