Régularité de la métrique d'une variété riemannienne à bord, convergence et problème inverse de Gelfand.

Mémoire de DEA.
DEA Maths Purs de l'université Paris XI.

Aymeric AUTIN

septembre 2004

Résumé

Dans la première partie du mémoire, on rappelle la définition de certains espaces fonctionnels ainsi que l'intérêt des coordonnées harmoniques. Après ces définitions, le premier point consiste à établir la régularité de la métrique d'une variété riemannienne à bord sous des hypothèses concernant la courbure de Ricci de la variété et de son bord ainsi que la courbure moyenne du bord. Le deuxième point concerne la convergence d'une suite de variétés à bord qui vérifient aussi des contraintes géométriques. On utilise alors le premier point pour établir la régularité de la variété limite. Le troisième et dernier point s'intéresse à un problème inverse de Gelfand, c'est-à-dire obtenir des informations sur une variété riemannienne et sa métrique juste à partir de données spectrales sur le bord.

Table des matières

1 Introduction

Ce mémoire est le résultat de l'étude de l'article [AKKLT].

Dans le première partie de ce mémoire, je définis les espaces de Hölder puis les espaces de Zygmund. Pour ces derniers j'adopte deux points de vue : d'une part la décomposition de Littlewood-Paley et d'autre part des taux d'accroissement. L'intérêt de ces espaces est double. D'abord ils forment une échelle d'interpolation ce qui servira à obtenir des résultats par un raisonnement d'interpolation ! Voir par exemple dans les démonstrations des lemmes 1 et 3. Ensuite que la métrique soit dans l'espace de Zygmund C^2_* est une condition suffisante pour avoir l'unicité locale du flot géodésique (cf proposition 10) nécessaire dans la démonstration du théorème 6.

Ensuite on définit les notions de laplacien et de coordonnées harmoniques sur une variété riemannienne. Les coordonnées harmoniques sont adaptées aux problèmes liés à la régularité de la métrique, ce qui est explicité dans [DTK]. De plus, dans des coordonnées harmoniques, on peut obtenir une équation liant le laplacien de la métrique à la courbure de Ricci de la forme :

$$\Delta g_{lm} + 2\,\mathrm{Ric}_{lm} = B_{lm}(g, \nabla g).$$

où B est une forme quadratique en ∇g avec des coefficients dépendant continûment de la métrique g. Et on va se servir de cette équation comme d'une EDP afin d'obtenir des informations sur la métrique.

Le premier résultat de l'article [AKKLT] auquel on s'intéresse est le suivant :

Si B est une boule de centre 0 dans $\mathbb{R}^n$, $\Omega = B \cap \{x : x^n > 0\}, \Sigma = B \cap \{x : x^n = 0\}$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Soit g une métrique sur $\overline{\Omega}$, on notera h sa restriction à Σ. Et enfin on notera H la courbure moyenne de Σ.
Sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1) & g &\in H^{1,p}(\Omega), p > n \\
&(2) & h &\in H^{1,2}(\Sigma) \\
&(3) & \mathrm{Ric}^{\Omega} &\in L^{\infty}(\Omega) \\
&(4) & \mathrm{Ric}^{\Sigma} &\in L^{\infty}(\Sigma) \\
&(5) & H &\in Lip(\Sigma).
\end{aligned}$$

On a que, pour $z \in \Sigma$, il existe des coordonnées harmoniques frontalières sur un voisinage $\overline{U}$ de z dans $\overline{\Omega}$, dans lesquelles les coefficients de la métrique vérifient

$$g_{jk} \in C^2_*(\overline{U}).$$

Mais la démonstration de ce théorème sous ces hypothèses demandait trop d'outils d'analyse que je ne maîtrisais pas (résultats de régularité elliptique dans des espaces de Hölder, de Sobolev ou de Besov...). Je me suis donc contenté d'une version plus faible où on remplace les hypothèses (1) et (2) par l'hypothèse :

$$g \in C^{1+s}(\overline{\Omega}), s \in (0,1) \,;$$

résultat au demeurant suffisant pour étudier la suite de l'article.

Dans la suite, après avoir défini la convergence d'une suite de variétés riemanniennes, on montre, qu'en posant des contraintes géométriques a priori, on obtient une famille de variétés riemanniennes à bord précompacte ; c'est l'objet du théorème 3. Là aussi les espaces de Zygmund et les coordonnées harmoniques jouent un grand rôle ; ils sont unifiés dans la notion de rayon C^2_*-harmonique (cf proposition 11).

On s'intéresse ensuite à un problème de Gelfand : il s'agit d'obtenir les caractéristiques d'une variété riemannienne compacte connexe à bord non vide et possédant une métrique dans l'espace de Zygmund C^2_* à partir des données spectrales du laplacien de Neumann sur son bord. C'est un problème qui peut apparaître dans des domaines comme la géophysique ou l'imagerie médicale. Et c'est dans l'étude de la "stabilité" de ce problème inverse qu'intervient la précompacité obtenue précédemment.

Je tiens avant toute chose à remercier Mr L.Guillopé pour sa direction et les entrevues éclairantes qu'il m'a accordées.

2 Résultats préliminaires

2.1 Espaces fonctionnels

2.1.1 Espaces de Sobolev

Définition 1
Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $p \in (0,\infty)$ on définit $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s}L^p(\mathbb{R}^n)$ où

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^s : S'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & S'(\mathbb{R}^n) \\ u & \longrightarrow & F^{-1}((1+ \parallel \xi \parallel^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)) \end{array}$$

où F est la transformation de Fourier.

Remarque 1
Pour $s \in \mathbb{N}, H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n), D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mid \alpha \mid \leq s\}$.

On rappelle aussi les injections de Sobolev ([BREZ]) :

Proposition 1
Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [0,\infty]$

$$H^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{p'}(\Omega) & \text{si } 1 \leq p < n \quad \text{avec } \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ L^q(\Omega) & \text{si } p = n \quad \text{pour tout } q \in [0,\infty[\\ L^\infty(\Omega) & \text{si } p > n. \end{cases}$$

2.1.2 Espaces de Hölder, espaces de Zygmund

Pour ce paragraphe, mes références sont [GER.AL] et [TAYL, Tome 3].

Définition 2
Pour $0 < s < 1$ on définit l'espace de Hölder $C^s(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions bornées u vérifiant

$$\sup\{\frac{\mid u(x) - u(y) \mid}{\mid x - y \mid^s},\ x \neq y\} < \infty$$

avec pour norme $\parallel u \parallel_s = \parallel u \parallel_\infty + \parallel u \parallel_s'$ où $\parallel u \parallel_s'$ désigne le sup *précédent. Pour $s = k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 1$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions bornées $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ telles que pour $\mid \beta \mid = k, D^\beta u \in C^r(\mathbb{R}^n)$.*

On a les injections suivantes :

Proposition 2
Pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $p \in \mathbb{N}$, $H^{t,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $s < t - \frac{n}{p}$.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \psi(\xi) = 1$ pour $\mid \xi \mid \leq 1/2, \psi(\xi) = 0$ pour $\mid \xi \mid \geq 1$. Posons $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$: φ est supportée dans la couronne $1/2 \leq \mid \xi \mid \leq 2$, et, pour tout ξ,

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{p \geq 0} \varphi(2^{-p}\xi).$$

Définition 3
Pour $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, on pose $u_{-1} = \psi(D)u$, $u_p = \varphi(2^{-p}D)u$, $p \geq 0$, de sorte qu'on obtient la décomposition de Littlewood-Paley de u :

$$u = \sum_{p \geq -1} u_p.$$

Proposition 3
Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante C telle que si $u \in C^s(\mathbb{R}^n)$ et est bornée alors
$$\sup\{2^{ps} \parallel u_p \parallel_\infty, p \geq -1\} \leq C \parallel u \parallel_s .$$

preuve :

- **si s=0.** $u_{-1} = \psi(D)u = F^{-1}(\psi) * u$ donc
$$\begin{aligned} \mid u_{-1}(x) \mid &\leq \int \mid F^{-1}(\psi)(y)u(x-y) \mid dy \\ &\leq \parallel u \parallel_\infty \int \mid F^{-1}(\psi)(y) \mid dy \end{aligned}$$
et pour $p \geq 0$ on remarque qu'on a $F^{-1}(\varphi(2^{-p}.))(\xi) = 2^{pn}F^{-1}(\varphi)(2^p\xi)$ d'où
$$\begin{aligned} \mid u_p(x) \mid &\leq \parallel u \parallel_\infty \int 2^{pn} \mid F^{-1}(\varphi)(2^p y) \mid dy \\ &\leq \parallel u \parallel_\infty \int \mid F^{-1}(\varphi)(y) \mid dy \end{aligned}$$
donc pour tout $p \geq -1$ on a $\parallel u_p \parallel_\infty \leq C \parallel u \parallel_\infty$ où C ne dépend pas de p.
- **si** $s \in \mathbb{N}^*$**.** Comme on a $\partial^\alpha(u_p) = (\partial^\alpha u)_p$, il suffit, grâce au premier point de montrer :
$$2^{ps} \parallel u_p \parallel_\infty \leq C \sum_{|\alpha|=s} \parallel \partial^\alpha u_p \parallel_\infty . \tag{6}$$
Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 au voisinage du support de φ , alors, $\varphi(\xi) = (\sum_{|\alpha|=s} \xi^\alpha \chi_\alpha(\xi))\varphi(\xi)$ avec $\chi_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha \chi(\xi))}{\sum_{|\alpha|=s}(\xi^\alpha)^2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc
$$\begin{aligned} F(u_p)(\xi) &= \varphi(2^{-p}\xi)F(u)(\xi) \\ &= \sum_{|\alpha|=s} 2^{-ps}\xi^\alpha \chi_\alpha(2^{-p}\xi)F(u_p)(\xi) \\ &= 2^{-ps} \sum_{|\alpha|=s} \chi_\alpha(2^{-p}\xi)F(\partial^\alpha u_p)(\xi) \end{aligned}$$
d'où,
$$\begin{aligned} 2^{ps}u_p &= \sum_{|\alpha|=s} F^{-1}(\chi_\alpha(2^{-p}.)) * \partial^\alpha u_p \\ 2^{ps} \parallel u_p \parallel_\infty &\leq (\int F^{-1}(\chi_\alpha)(y)dy) \sum_{|\alpha|=s} \parallel \partial^\alpha u_p \parallel_\infty . \end{aligned}$$

- **si s n'est pas entier.** Par (6) on se ramène à $s \in (0,1)$.
  On a $\| u_{-1} \|_\infty \leq C \| \ u \|_\infty$ donc $2^{-s} \| u_{-1} \|_\infty \leq \tilde{C}$.
  Pour $p \geq 0$, en remarquant que $\int F^{-1}(\varphi)(z)dz = cste \times \varphi(0) = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \int 2^{pn} F^{-1}(\varphi)(2^p(x-y))u(y)dy \\ &= \int 2^{pn} F^{-1}(\varphi)(2^p(x-y))(u(y)-u(x))dy \end{aligned}$$

  d'où

$$| \ u_p(x) \ | \quad \leq \quad \| \ u \ \|'_s \int 2^{pn} \ | \ F^{-1}(\varphi)(2^p(x-y)) \ || \ x-y \ |^s \ dy$$

  par un changement de variable on obtient

$$| \ u_p(x) \ | \leq C \ \| \ u \ \|'_s \ 2^{-ps}$$

□

On a en partie la réciproque de la proposition 3 :

Proposition 4
Si s n'est pas entier et si $\sup\{2^{ps} \| \ u_p \ \|_\infty, p \geq -1\} < \infty$ *alors* $u \in C^s(\mathbb{R}^n)$. *De plus, il existe une constante* C *telle que* $\| \ u \ \|'_s \leq C \sup\{2^{ps} \| \ u_p \ \|_\infty, p \geq -1\}$.

preuve : On prend $s \in (0,1)$. Notons

$$S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q, R_p u = \sum_{q \geq p} u_q.$$

Pour un p qu'on fixera plus tard on a $u = S_p u + R_p u$. On a par hypothèse

$$\| \ R_p u \ \|_\infty \leq \sum_{q \geq p} \| \ u_q \ \|_\infty \leq C 2^{-ps}. \tag{7}$$

De plus

$$| \ S_p u(x) - S_p u(y) \ | \leq | \ x-y \ | \sum_{q=-1}^{p-1} \| \ \nabla u_q \ \|_\infty \ . \tag{8}$$

Or

$$\begin{aligned} F(\partial_i u_q)(\xi) &= cste \ \xi_i \varphi(2^{-q}\xi) F(u)(\xi) \\ &= cste \ 2^q (2^{-q}\xi_i) \varphi(2^{-q}\xi) F(u)(\xi) \\ &= cste \ 2^q \Phi_i(2^{-q}\xi) F(u_q)(\xi) \end{aligned}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 au voisinage du support de φ et $\Phi_i(x) = x_i\chi(x)$. Donc

$$\partial_i u_q = cste\ 2^q F^{-1}(\Phi_i(2^{-q}\xi)) * u_q$$

et

$$\| \partial_i u_q \|_\infty \leq cste\ 2^q \| u_q \|_\infty \leq C2^{q(1-s)}.$$

En reportant dans (8) et, comme $0 < s < 1$, on obtient

$$| S_p u(x) - S_p u(y) | \leq C | x - y | 2^{p(1-s)}$$

et avec (7) on a finalement $| u(x) - u(y) | \leq C | x - y | 2^{p(1-s)} + 2C2^{-ps}$.

On fixe désormais p comme le plus grand entier tel que $2^p \leq | x - y |^{-1}$ ce qui donne $| u(x) - u(y) | \leq C | x - y |^s$ et permet de conclure que $u \in C^s(\mathbb{R}^n)$.

□

Définition 4
Pour s entier on définit l'espace de Zygmund $C_*^s(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions u vérifiant $\sup\{2^{ps} \| u_p \|_\infty, p \geq -1\} < \infty$. *On le munit de la norme* $\| .. \|_{C_*^s}$ *définie par* $\| u \|_{C_*^s} = \sup\{2^{ps} \| u_p \|_\infty, p \geq -1\}$.

Remarque 2
Pour s entier $C^s(\mathbb{R}^n) \subsetneq C_*^s(\mathbb{R}^n)$.

Une deuxième façon de définir les espaces de Zygmund, est de faire intervenir des différences :

Proposition 5
Pour s entier, l'espace de Zygmund $C_*^s(\mathbb{R}^n)$ est aussi l'espace des fonctions $u \in C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\sum_{|\alpha|=s-1} \sup\{\frac{| \partial^\alpha u(x) + \partial^\alpha u(y) - 2\partial^\alpha u((x+y)/2) |}{| x - y |}, x \neq y\}$$

soit finie.

Proposition 6
Les deux normes définies précédemment sur l'espace de Zygmund $C_*^s(\mathbb{R}^n)$ sont équivalentes.

2.2 Coordonnées harmoniques

2.2.1 Existence et régularité

Avant de définir des fonctions harmoniques sur une variété riemannienne, il faut se munir d'un opérateur laplacien. Soit (M, g) une variété riemannienne. On notera (g_{ij}) la matrice représentant le tenseur de métrique dans un système de coordonnées, (g^{ij}) son inverse, et $\sqrt{g}$ pour $(\det(g_{ij}))^{1/2}$. On utilisera dans la suite les notations d'Einstein concernant les indices de sommation.

Définition 5
Avec les notations précédentes, on définit le laplacien, Δ, d'une fonction u par son expression dans un système de coordonnées locales par $\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{g}\partial_i u)$.

Remarque 3
La présence du signe $-$ de la définition précédente varie selon les références. On essaiera de rester cohérent dans cet article.

Avant d'examiner l'existence de système de coordonnées harmoniques locales, rappelons un résultat de Schauder, donné dans [PE], sur les estimations a priori des solutions de problèmes elliptiques du type $Lu = a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u = f$ avec (a^{ij}) symétrique définie positive.

Théorème 1
On suppose que (a^{ij}) et (b^i) sont dans $C^{m+\alpha}$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné et $K \subset \Omega$, et $\alpha \in (0, 1)$.
Alors il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} \| u \|_{C^{\alpha+m+2},K} &\leq C(\| Lu \|_{C^{\alpha+m},\Omega} + \| u \|_{C^{\alpha+m},\Omega}), \\ \| u \|_{C^{\alpha+1},K} &\leq C(\| Lu \|_{C^0,\Omega} + \| u \|_{C^{\alpha},\Omega}). \end{aligned}$$

De plus si Ω a une frontière régulière et que $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$, alors il existe une constante C telle que

$$\| u \|_{C^{\alpha+m+2},\Omega} \leq C(\| Lu \|_{C^{\alpha+m},\Omega} + \| \varphi \|_{C^{\alpha+m+2},\partial\Omega}).$$

Proposition 7
Soit (M, g) variété riemannienne avec $g \in C^{k+\alpha}, k \geq 1, \alpha \in (0, 1)$. Si $p \in M$ alors il existe un voisinage $U \ni p$ sur lequel on peut trouver un système de coordonnées harmoniques $(x_1, ..., x_n)$. De plus les coordonnées harmoniques sont des fonctions $C^{k+1+\alpha}$ des anciennes coordonnées.

Preuve ([PE]) : On choisit d'abord un système de coordonnées $y = (y_1, ..., y_n)$ dans un voisinage de p avec $y(p) = 0$ et dans lequel $g = (g_{i,j})$. Ensuite on se donne une petite boule $B(0, \varepsilon)$ dans laquelle on résout les problèmes de Dirichlet suivants :

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= 0 \\ x_k &= y_k \text{ sur } \partial B(0, \varepsilon). \end{aligned}$$

On trouve ainsi n fonctions harmoniques dont il reste à montrer qu'elles constituent des coordonnées. Grâce aux estimations a priori de Schauder on a :

$$\begin{aligned} \| x - y \|_{C^{2+\alpha}, B(0,\varepsilon)} &\leq C \quad (\| \Delta(x - y) \|_{C^\alpha, B(0,\varepsilon)} + \| (x - y)_{|\partial B(0,\varepsilon)} \|_{C^{2+\alpha}, \partial B(0,\varepsilon)}) \\ &= \quad C \| \Delta y \|_{C^\alpha, B(0,\varepsilon)} \; . \end{aligned}$$

Si on prend pour coordonnées y les coordonnées normales, alors on a $\partial_k g_{i,j} = 0$ en p et donc $\Delta y = 0$ en p. D'où $\| \Delta y \|_{C^\alpha, B(0,\varepsilon)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Et finalement on a que Dx et Dy sont proches pour un petit ε et que x forme donc un système de coordonnées.

Ensuite, le résultat de régularité de ces coordonnées est donné par les estimations de Schauder sur le problème de Dirichlet en sachant que les coefficients du laplacien font intervenir les dérivées premières de la métrique et sont donc de régularité $C^{k-1+\alpha}$.

□

Le premier grand intérêt des coordonnées harmoniques est le résultat suivant signalé dans [DTK] :

Proposition 8
Si la métrique $g \in C^{k+\alpha}$ dans un système de coordonnées, alors elle est aussi de classe $C^{k+\alpha}$ dans des coordonnées harmoniques.

Preuve : L'expression de la métrique dans les coordonnées harmoniques ne fait intervenir que les dérivées premières de ces dernières par rapport à celles d'origine, et on sait par la proposition 7 qu'elles sont $C^{k+\alpha}$.

Remarque 4
Par contre, si la métrique $g \in C^{k+\alpha}$ dans un système de coordonnées, dans les coordonnées normales on peut seulement affirmer qu'elle est $C^{k-2+\alpha}$.

2.2.2 Coordonnées harmoniques et courbure de Ricci

Le deuxième intérêt des coordonnées harmoniques développé dans [DTK] est qu'elles simplifient l'expression de la courbure de Ricci.

Définition 6
Si on note R le tenseur de courbure on définit la courbure de Ricci par : $\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{TR}(z \to R(z,x,y))$. *Si (e_i) est une base orthonormée*

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,x,y),e_i).$$

Si on travaille localement dans des coordonnées harmoniques (x^i) on note Ric_{lm} les coordonnées de la courbure de Ricci. Montrons le résultat suivant :

Proposition 9
Localement, dans des coordonnées harmoniques, on a l'équation suivante :

$$\Delta g_{lm} + 2\,\mathrm{Ric}_{lm} = B_{lm}(g,\nabla g). \tag{9}$$

où B est une forme quadratique en ∇g avec des coefficients dépendant continûment de g.

Preuve :

- Commençons par exprimer Ric_{lm} en fonction de la métrique. Par définition
$$\mathrm{Ric}_{lm} = \sum_i R^i_{lim}$$
où les coefficients de la courbure R^p_{lim} s'expriment en fonction des symboles de Christoffel (on note ∂_i pour $\frac{\partial}{\partial x_i}$)
$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{10}$$
par
$$R^p_{lim} = \partial_i \Gamma^p_{lm} - \partial_l \Gamma^p_{im} + \Gamma^q_{lm}\Gamma^p_{iq} - \Gamma^q_{im}\Gamma^p_{lq}$$
d'où
$$\mathrm{Ric}_{lm} = -\frac{1}{2} g^{ik}\partial^2_{ik} g_{lm} + \frac{1}{2} g^{ik}(\partial^2_{im} g_{lk} + \partial^2_{lk} g_{im} - \partial^2_{lm} g_{ik}) + B_{lm}(g,\nabla g). \tag{11}$$
avec B une forme quadratique en ∇g avec des coefficients dépendant continûment de g.
- Définissons $\Gamma^r = g^{lm}\Gamma^r_{lm}$ d'où avec (10) :
$$\begin{aligned} g_{ri}\partial_j \Gamma^r &= g_{ri}\partial_j\left(\frac{1}{2} g^{lm} g^{rk}(\partial_l g_{mk} + \partial_m g_{lk} - \partial_k g_{lm})\right) \\ &= \frac{1}{2} g_{ri} g^{rk} g^{lm}(\partial^2_{jl} g_{mk} + \partial^2_{jm} g_{lk} - \partial^2_{jk} g_{lm}) + B(g,\nabla g) \\ &= \frac{1}{2} g^{lm}(\partial^2_{jl} g_{mi} + \partial^2_{jm} g_{li} - \partial^2_{ji} g_{lm}) + B(g,\nabla g) \\ &= g^{lm}\partial^2_{jl} g_{mi} - \frac{1}{2} g^{lm}\partial^2_{ij} g_{lm} + B(g,\nabla g). \end{aligned}$$

où B est utilisé comme terme générique contenant à chaque fois tout ce qui est quadratique. Donc dans l'expression de Ric_{lm} on peut remplacer :

$$\begin{aligned}
g^{ik}\partial^2_{im}g_{lk} &= g_{rl}\partial_m\Gamma^r + \frac{1}{2}g^{ik}\partial^2_{lm}g_{ik} + B(g,\nabla g)\\
g^{ik}\partial^2_{lk}g_{im} &= g_{rm}\partial_l\Gamma^r + \frac{1}{2}g^{ik}\partial^2_{lm}g_{ik} + B(g,\nabla g).
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Ric}_{lm} = -\frac{1}{2}g^{ik}\partial^2_{ik}g_{lm} + \frac{1}{2}(g_{rm}\partial_l\Gamma^r + g_{rl}\partial_m\Gamma^r) + B(g,\nabla g). \tag{12}$$

- Revenons sur l'expression de Γ^r. On rappelle, pour A_0 inversible

$$D_{A_0}(\det)(X) = \det A_0\, \mathrm{TR}(A_0^{-1}X)$$

dont on tire

$$\begin{aligned}
\partial_i(\sqrt{g}) &= \frac{\sqrt{g}}{2}\,\mathrm{TR}(g^{-1}\partial_i g)\\
-\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ik}) &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{TR}(g^{-1}\partial_i g)g^{ik} - \partial_i g^{ik}\\
&= -\frac{1}{2}g^{ml}\partial_i g_{lm}g^{ik} - \partial_i g^{ik}
\end{aligned}$$

or en différenciant $gg^{-1} = id$ on obtient $\partial_i(g^{-1}) = -g^{-1}(\partial_i g)g^{-1}$ d'où

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ik}) &= -\frac{1}{2}g^{ml}\partial_i g_{lm}g^{ik} + g^{il}\partial_i g_{lm}g^{mk}\\
&= -\frac{1}{2}g^{ml}\partial_i g_{lm}g^{ik} + g^{ml}\partial_m g_{li}g^{ik}\\
&= g^{ml}g^{ik}(\partial_m g_{li} - \frac{1}{2}\partial_i g_{lm}).
\end{aligned}$$

où on a fait un changement d'indice $i \leftrightarrow m$ à la deuxième ligne. D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma^k &= g^{lm}\Gamma^k_{lm}\\
&= \frac{1}{2}g^{ml}g^{ik}(\partial_l g_{mi} + \partial_m g_{li} - \partial_i g_{lm})\\
&= g^{ml}g^{ik}(\partial_m g_{li} - \frac{1}{2}\partial_i g_{lm})
\end{aligned}$$

donc en conclusion

$$\Gamma^k = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ik}). \tag{13}$$

- On a pour toute fonction u :

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{g}\partial_i u)\\ &= -g^{ij}\partial^2_{ij}u - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{g})\partial_i u\\ &= -g^{ij}\partial^2_{ij}u + \Gamma^i\partial_i u\end{aligned}$$

donc pour un système de coordonnées harmoniques $(x_1, ..., x_n)$

$$\Delta x_k = 0 = \Gamma^k$$

et donc,

$$\Delta g_{lm} = -g^{ik}\partial^2_{ik}g_{lm}. \tag{14}$$

On tire de (12) et de (14) l'équation recherchée :

$$\Delta g_{lm} + 2\,\mathrm{Ric}_{lm} = B_{lm}(g, \nabla g).$$

□

3 Régularité locale à la frontière du tenseur de métrique

Soit B une boule de centre 0 dans $\mathbb{R}^n$, $\Omega = B \cap \{x : x^n > 0\}, \Sigma = B \cap \{x : x^n = 0\}$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Soit g une métrique sur $\overline{\Omega}$, on notera h sa restriction à Σ. Et enfin on notera H la courbure moyenne de Σ.

Vu que désormais on a un bord on précise la notion de coordonnées harmoniques. Sur un voisinage de $z \in \Sigma$ dans $\overline{\Omega}$, on appellera "coordonnées harmoniques frontalières" un système de coordonnées $(u^1, ..., u^n)$ vérifiant $\Delta u^j = 0$ et telles que leurs restrictions à Σ annulent le laplacien défini à partir de la métrique h, et telles que u^n s'annule sur Σ, et enfin telles qu'elles réalisent un difféomorphisme entre un voisinage de z et $\overline{\Omega}$.

Théorème 2
On fait les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} g &\in C^{1+s}(\overline{\Omega}), s \in (0,1) &(15)\\ \mathrm{Ric}^{\Omega} &\in L^\infty(\Omega) &(16)\\ \mathrm{Ric}^{\Sigma} &\in L^\infty(\Sigma) &(17)\\ H &\in Lip(\Sigma). &(18)\end{aligned}$$

Alors, pour $z \in \Sigma$, il existe des coordonnées harmoniques frontalières sur un voisinage $\overline{U}$ de z dans $\overline{\Omega}$, dans lesquelles les coefficients de la métrique vérifient

$$g_{jk} \in C^2_*(\overline{U}). \tag{19}$$

Preuve :

- En utilisant la proposition 7, en commençant par les construire dans un voisinage de z dans Σ, puis en résolvant des problèmes de Dirichlet, on peut trouver un système de coordonnées harmoniques frontalières $(u^1, ..., u^n)$ sur un voisinage de z dans $\overline{\Omega}$. De plus par la proposition 8 la métrique vérifie encore (15) dans ces nouvelles coordonnées.
- De plus dans ces coordonnées harmoniques la métrique vérifie l'équation (9) : $\Delta g_{lm} + 2\,\mathrm{Ric}_{lm} = B_{lm}(g, \nabla g)$ qu'on écrit

$$\Delta g_{lm} = F_{lm}. \tag{20}$$

Grâce aux hypothèses (15) et (16) on a que $F_{lm} \in L^\infty(\Omega)$ et que les coefficients du laplacien sont aussi dans C^{1+s}. Et grâce aux hypothèses concernant Σ et par des théorèmes de régularité elliptique faisant notamment intervenir des espaces *bmo* (voir [AKKLT]) on a

$$g_{jk} \mid_\Sigma = h_{jk} \in C^2_*(\Sigma), 1 \leq j, k \leq n-1. \tag{21}$$

A partir de ça on montre le lemme suivant :

Lemme 1

Dans les coordonnées harmoniques on a

$$g_{jk} \in C^2_*(\overline{\Omega}), 1 \leq j, k \leq n-1. \tag{22}$$

Preuve du lemme 1 : On commence par étendre F_{lm} par 0 sur $B \setminus \Omega$, puis en étendant g^{ik} en $\widetilde{g}^{ik} \in C^{1+s}(B)$ (pour prolonger des fonctions hölderiennes voir [TRIEB]) on obtient un $\widetilde{\Delta}$ et on peut résoudre $\widetilde{\Delta}\omega_{lm} = F_{lm}$. Par les mêmes résultats de régularité elliptique invoqués précédemment on obtient $\omega_{lm} \in C^2_*(B)$ et donc

$$\omega_{lm} \mid_\Sigma \in C^2_*(\Sigma). \tag{23}$$

Avec (21) on a finalement :

$$\begin{aligned} \Delta(g_{jk} - \omega_{jk}) &= 0 \text{ sur } \Omega \\ (g_{jk} - \omega_{jk}) \mid_\Sigma &= b_{jk} \in C^2_*(\Sigma), 1 \leq j, k \leq n-1. \end{aligned}$$

Par les estimations de Schauder (théorème 1) on a

$$b_{jk} \in C^r(\Sigma) \Longrightarrow (g_{jk} - \omega_{jk}) \in C^r(\Omega), 2 < r < 2 + s.$$

En fait ceci est encore vrai pour $1 < r < 2$. Et donc par interpolation on a

$$b_{jk} \in C^2_*(\Sigma) \Longrightarrow (g_{jk} - \omega_{jk}) \in C^2_*(\Omega).$$

Ce qui établit le lemme 1$\circ$

- On s'intéresse maintenant à la matrice inverse (g^{lm}) qui vérifie de la même manière que dans la proposition 9 :

$$\Delta g^{lm} = B^{lm}(g,\nabla g) - 2\,\mathrm{Ric}^{lm} = F^{lm}. \tag{24}$$

Pour l'exploiter comme dans l'étape précédente il nous faut des conditions au bord. Le lemme suivant donne donc des conditions de Neumann :

Lemme 2
Soit N le champ de vecteur normal à Σ pointant vers l'intérieur de Ω, on a sur Σ :

$$\begin{aligned} Ng^{nn} &= -2(n-1)Hg^{nn} && (25)\\ Ng^{ln} &= -(n-1)Hg^{ln} + \frac{1}{2\sqrt{g^{nn}}}g^{lk}\partial_k g^{nn}, 1 \le l \le n-1. && (26)\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2 : Avec $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, on a

$$\nabla u^l = g^{ij}(\partial_i u^l)\partial_j = g^{lj}\partial_j$$

d'où

$$\begin{aligned} g^{lm} &= \langle \nabla u^l, \nabla u^m\rangle \\ N &= \frac{\nabla u^n}{\parallel \nabla u^n \parallel} = \frac{1}{\sqrt{g^{nn}}}\nabla u^n. \end{aligned}$$

et,

$$Ng^{ln} = \langle \nabla_N \nabla u^l, \nabla u^n\rangle + \langle \nabla u^l, \nabla_N \nabla u^n\rangle. \tag{27}$$

Si $(e_1,...,e_{n-1})$ est un repère orthonormé de Σ et X un champ de vecteur sur $\overline{\Omega}$, on a

$$\operatorname{div} X\ |_\Sigma = \sum_{j=1}^{n-1}\langle \nabla_{e_j}X, e_j\rangle + \langle \nabla_N X, N\rangle.$$

Du coup si on prend $X_l = \nabla u^l$ on a $\operatorname{div} X_l = \Delta u^l = 0$, d'où le premier terme du membre de droite de (27) vaut

$$-\sqrt{g^{nn}}\sum_{j=1}^{n-1}\langle \nabla_{e_j}X_l, e_j\rangle. \tag{28}$$

Si on décompose X_l en composantes tangentielle et normale :

$$X_l = X_l^N + X_l^T, X_l^N = \langle X_l, N\rangle N = \frac{g^{ln}}{\sqrt{g^{nn}}}N, X_l^T = \nabla v^l,$$

où $v^l = u^l \mid_\Sigma$ est harmonique donc $\sum \langle \nabla_{e_j} \nabla v^l, e_j \rangle = \mathrm{div}\, \nabla v^l = \Delta v^l = 0$. On en tire, en notant $A = dN$ l'endomorphisme de Weingarten, que (28) vaut

$$\begin{aligned}
-\sqrt{g^{nn}} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_j} (\frac{g^{ln}}{\sqrt{g^{nn}}} N), e_j \rangle &= -g^{ln} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_j} N, e_j \rangle \\
&= -g^{ln} \sum_{j=1}^{n-1} \langle A e_j, e_j \rangle \\
&= -(n-1) H g^{ln}
\end{aligned}$$

où $H = \mathrm{TR}\, A/(n-1)$. Ce qui dans le cas $l = n$ montre l'égalité (25). Pour le cas $l \neq n$ il nous reste le deuxième terme du membre de droite de (27). On rappelle que pour une 1-forme α on a

$$d\alpha(X, Y) = \langle \nabla_X \alpha, Y \rangle - \langle \nabla_Y \alpha, X \rangle,$$

appliqué à $\alpha = du^n, X = X_l, Y = N$ on obtient (avec $d \circ d = 0$)

$$\langle \nabla u^l, \nabla_N \nabla u^n \rangle = \langle N, \nabla_{X_l} \nabla u^n \rangle$$

Or

$$\langle X_l, \nabla g^{nn} \rangle = \nabla_{X_l} g^{nn} = 2 \langle \nabla_{X_l} \nabla u^n, \nabla u^n \rangle.$$

D'où

$$\langle \nabla u^l, \nabla_N \nabla u^n \rangle = \frac{1}{2\sqrt{g^{nn}}} \langle X_l, \nabla g^{nn} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{g^{nn}}} g^{lk} \partial_k g^{nn}.$$

Ce qui démontre (26) et achève la preuve du lemme 2∘

- Exploitons donc ces conditions au bord :

LEMME 3
Dans les coordonnées harmoniques $(u^1, ..., u^n)$ *on a* $g^{ln} \in C^2_*(\overline{\Omega}), 1 \leq l \leq n$.

Preuve du lemme 3 : Comme dans le lemme 1 on étend g^{jk} en $\widetilde{g}^{jk} \in C^{1+s}(B)$ et F^{lm} par 0. On obtient alors une solution $\omega^{lm} \in C^2_*(B)$ de $\widetilde{\Delta} \omega^{lm} = F^{lm}$. Donc sur Ω on a

$$\Delta(g^{ln} - \omega^{ln}) = 0.$$

De plus, par l'égalité (25) et par le fait que N soit C^{1+s} (car les coordonnées u^i sont C^{2+s}, cf proposition 7), on obtient

$$N(g^{nn} - \omega^{nn}) \mid_\Sigma \in C^1_*(\Sigma).$$

Par un théorème de régularité un peu plus fort que le théorème 1 (voir un résultat auxiliaire de [AKKLT]) et par interpolation on obtient

$$(g^{nn} - \omega^{nn}) \in C^2_*(\overline{\Omega}),$$

ce qui montre le lemme dans le cas $l = n$. En sachant cela et avec l'égalité (26) du lemme précédent on a

$$N(g^{ln} - \omega^{ln}) \mid_\Sigma \in C^1_*(\Sigma).$$

Ce qui donne $(g^{ln} - \omega^{ln}) \in C^2_*(\overline{\Omega})$ pour tout l et achève la démonstration du lemme 3 $\circ$

- Il ne reste qu'à passer de g^{-1} à g.

LEMME 4
Dans les coordonnées harmoniques $(u^1, ..., u^n)$ *on a* $g_{ln} = g_{nl} \in C^2_*(\overline{\Omega})$, $1 \leq l \leq n$.

Preuve du lemme 4 : Notons A_{lm} le déterminant de la matrice extraite de (g_{ij}) en ôtant la ligne l et la colonne m. On a

$$g^{jk} = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(g)} A_{jk}.$$

Le lemme 1 nous apprend que $A_{nn} \in C^2_*(\overline{\Omega})$ et le lemme 3 que $g^{nn} \in C^2_*(\overline{\Omega})$, d'où

$$\det(g) = \frac{A_{nn}}{g^{nn}} \in C^2_*(\overline{\Omega}).$$

Et donc, toujours avec le lemme 3

$$A_{ln} = A_{nl} = (-1)^{n+l} \det(g) g^{nl} \in C^2_*(\overline{\Omega}), 1 \leq l \leq n.$$

On a aussi en faisant apparaître h,

$$A_{ln} = (-1)^{n-1+l} g_{jn} \det(h) h^{jl}, 1 \leq l \leq n-1.$$

Par le lemme 1 on sait que h est C^2_* et définie positive ; on déduit donc de l'égalité précédente que $(g_{n1}, ..., g_{nn-1}) \in C^2_*(\overline{\Omega})$. Il reste à obtenir g_{nn}. Or on a

$$\sum_j g_{jn} g^{jn} = 1$$

ce qui avec le lemme 3 et ce qui précède et $g^{nn} > 0$ montre que $g_{nn} \in C^2_*(\overline{\Omega})$. Cela achève le lemme 4 et donc le théorème 2.

$\square$

Remarque 5
Les auteurs de l'article [AKKLT] améliorent ensuite le théorème 2 en affaiblissant les hypothèses. Le théorème reste donc vrai en remplaçant (15) *par*

$$\begin{aligned} g &\in H^{1,p}(\Omega), \text{ pour un } p > n \\ h &\in H^{1,2}(\Sigma). \end{aligned}$$

4 Flot géodésique

D'après un théorème d'Osgood qui assure, sous de bonnes hypothèses ([TAYL, Tome1]), l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle, on a

Proposition 10
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si le tenseur de métrique $g \in C^2_*(U)$, alors le flot géodésique pour la métrique g est défini localement de manière unique sur U.

Corollaire 1
Pour le $\overline{\Omega}$ précédent, si $g \in C^2_*(\overline{\Omega})$, alors une géodésique partant d'un point $z \in \Sigma$ selon une direction $v \in T_z\overline{\Omega}$ transversal à Σ, pointant vers l'intérieur de Ω, est définie de manière unique.

5 Convergence géométrique de variétés à bord

Il faut tout d'abord comprendre la notion de convergence de variétés. C'est l'objet des deux définitions suivantes qui séparent les cas variétés compactes et non compactes.

Définition 7
On dira qu'une suite (M_k, g_k) de variétés riemanniennes compactes à bord converge dans la topologie $C^r, r \in (0, \infty)$ vers une variété riemannienne compacte (M, g) si g est une métrique C^r et si, pour k assez grand, il existe des difféomorphismes $F_k : M \longrightarrow M_k$ tels que $F_k^* g_k$ tend vers g dans la topologie C^r.

Pour des variétés non compactes, on "pointe" :

Définition 8
On dira qu'une suite de variétés riemanniennes pointées (M_k, g_k, p_k), avec $p_k \in M_k$, converge vers (M, g, p) dans la topologie C^r pointée si pour k assez grand,

il existe des suites $\rho_k < \sigma_k$ avec $\rho_k \longrightarrow \infty$ et des compacts $\Omega_k \subset M_k, \Sigma_k \subset M$ tels que

$$\begin{aligned} B(p_k, \rho_k) \subset \quad \Omega_k \quad &\subset B(p_k, \sigma_k) \\ B(p, \rho_k) \subset \quad \Sigma_k \quad &\subset B(p, \sigma_k), \end{aligned}$$

et s'il existe des difféomorphismes $F_k : \Sigma_k \longrightarrow \Omega_k$ tels que $F_k^* g_k$ tend vers g dans la topologie C^r sur tout compact de M et $F_k^{-1}(p_k) \longrightarrow p$.

On définit un rayon d'injectivité frontalier :

DÉFINITION 9
On appelle rayon d'injectivité frontalier, i_b, la quantité maximale qui vérifie : il existe un voisinage V de ∂M dans M et une fonction $f \in C^2(V)$ tels que $f \mid_{\partial M} = 0, \mid \nabla f \mid \equiv 1, [0, i_b) \subset f(V)$.

Dans ce cas des coordonnées locales $(v^1, ..., v^{n-1})$ sur un ouvert de ∂M peuvent être prolongées, à l'intérieur de M en étant constantes sur les courbes intégrales de ∇f et avec $v^n = f$, en un système de "coordonnées normales frontalières".

Dans la suite on s'intéresse à une famille de variétés riemanniennes à bord :

DÉFINITION 10
Si on se donne $R_0, i_0, S_0, d_0 \in (0, \infty)$, on appelle $\boldsymbol{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$ la famille des variétés riemanniennes (M, g) de dimension n, compactes, connexes, avec $g \in C^\infty$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \| \operatorname{Ric}_M \|_{L^\infty(M)} \leq R_0, \qquad & \| \operatorname{Ric}_{\partial M} \|_{L^\infty(\partial M)} \leq R_0, \\ i_M \geq i_0, \ i_{\partial M} \quad \geq & \quad i_0, \ i_b \geq 2 i_0 \\ \| H \|_{Lip(\partial M)} \quad \leq & \quad S_0 \\ \operatorname{diam}(M, g) \quad \leq & \quad d_0 \end{aligned}$$

Voici le résultat de convergence

THÉORÈME 3
$\boldsymbol{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$ est précompacte dans la topologie C^r pour tout $r < 2$; c'est-à-dire que toute suite $(M_k, g_k) \subset \boldsymbol{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$ a une sous-suite qui converge dans la topologie C^r vers (M, g). De plus, la métrique limite g qui, a priori, est C^r pour tout $r < 2$ est en fait dans $C^2_*(M)$.

Avant de commencer la preuve du théorème il faut introduire quelques nouvelles notions.

- Pour $s = l + \sigma$ avec $l \in \mathbb{Z}^+$ et $\sigma \in (0,1)$, $\rho \in (0,\infty), Q \in (1,2)$, on appelle $N(s,\rho,Q)$ l'ensemble des variétés riemanniennes à bord (M,g) connexes, de dimension n qui vérifient les propriétés suivantes, notées $\clubsuit$: pour $p \in M$, (i) Si $\text{dist}(p,\partial M) > \rho$, il existe un voisinage U de p dans M^{int} et une carte $\varphi : B(0,\rho/2) \to U$ tels que dans ces coordonnées on ait
$$Q^{-2} \mid \eta \mid^2 \leq g_{jk}(x)\eta^j\eta^k \leq Q^2 \mid \eta \mid^2,$$
et
$$\sum_{|\beta|=l} \sup \frac{\mid \partial^\beta g_{jk}(x) - \partial^\beta g_{jk}(y) \mid}{\mid x-y \mid^\sigma} \leq \rho^{-s}(Q-1).$$
(ii) Si $\text{dist}(p,\partial M) \leq \rho$, il existe un voisinage U de p dans M et une carte $\varphi : B^+(0,4\rho) \to U$ tels que ∂M corresponde à $\{x^n = 0\}$ et que les deux propriétés précédentes aient lieu dans ces coordonnées.
- On notera $N(s,\rho,Q,d_0)$ quand on considérera les variétés de $N(s,\rho,Q)$ de diamètre inférieur ou égal à d_0 . On a le résultat suivant ([PE]) :

Théorème 4
Si on se donne $s, \rho \in (0,\infty)$, pour tout $s' < s$, $N(s,\rho,Q,d_0)$ est compacte dans $N(s',\rho,Q,d_0)$ pour la topologie $C^{s'}$.

Remarque 6
On a le même résultat pour la topologie "pointée".

- On a vu que c'était dans les coordonnées harmoniques qu'on avait le plus d'informations ; on va donc introduire la notion de rayon harmonique : On définit en un point $p \in M$ un rayon C^2_*-harmonique, $r_h(p,g,Q)$, comme étant le plus grand r tel que, pour tout $\rho < r$ on ait $\clubsuit$ mais cette fois dans des coordonnées (φ) harmoniques et en remplaçant la deuxième propriété de (i) et donc aussi de (ii) par
$$\sum_{|\beta|=1} \sup \frac{\mid \partial^\beta g_{jk}(x) + \partial^\beta g_{jk}(y) - 2\partial^\beta g_{jk}((x+y)/2) \mid}{\mid x-y \mid} \leq \rho^{-2}(Q-1).$$
Puis, si M est compacte, on pose
$$r_h(M,g,Q) = inf\{r_h(p,g,Q), p \in \overline{M}\}.$$

Preuve du théorème 3 :
- Tout d'abord, pour pouvoir appliquer le théorème 4, on montre que pour $R_0, i_0, S_0, d_0 \in (0,\infty), Q \in (1,2), s \in (1,2)$ donnés, il existe $\rho > 0$ tel que
$$\mathbf{M}(R_0,i_0,S_0,d_0) \subset N(s,\rho,Q,d_0).$$

On va même montrer la proposition suivante, plus précise, qui impliquera ceci :

Proposition 11
Soient $R_0, i_0, S_0, d_0 \in (0,\infty), Q \in (1,2)$ *donnés. Alors il existe* $r_{\mathbf{M}} = r_{\mathbf{M}}(R_0, i_0, S_0, d_0, Q) > 0$ *tel que pour toute* $(M,g) \in \mathbf{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$ *on a* $r_h(M,g,Q) \geq r_{\mathbf{M}}$.

Avant de démontrer cette proposition, achevons la preuve du théorème 3.

- Si on considère une suite $(M_k, g_k) \subset \mathbf{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$, on sait par le point précédent et par le théorème 4 que quitte à prendre une sous-suite, elle converge dans la topologie C^r, pour tout $r < 2$, vers (M,g). Il reste à voir que $g \in C^2_*(M)$.
  On va essayer d'appliquer le théorème 2. Déjà on a que $g \in C^r(M)$ pour tout $r < 2$. Par définition de la convergence il existe des difféomorphismes $F_k : M \longrightarrow M_k$ tels que $F_k^* g_k$ tend vers g dans la topologie C^r. De plus $F_k^* \operatorname{Ric}_{M_k} = \operatorname{Ric}_{F_k^* M_k}$ a une norme infinie uniformément bornée. Donc par le théorème de Banach-Alaoglu il existe une sous-suite qui converge $faiblement^*$ vers une limite dans L^∞. De plus par définition de la courbure en fonction des symboles de Christoffel on a que $F_k^* \operatorname{Ric}_{M_k}$ tend vers Ric_M dans $\mathcal{D}'$. Et finalement par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$ on obtient que $\operatorname{Ric}_M \in L^\infty(M)$. De la même façon on obtient $\operatorname{Ric}_{\partial M} \in L^\infty(M)$, $H \in Lip(\partial M)$. On est donc dans les hypothèses du théorème 2 qui permet de conclure que $g \in C^2_*(M)$, ce qui termine la preuve du théorème 3 modulo la proposition 11 $\circ$

Preuve de la proposition 11 :
On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(M_k, \widetilde{g}_k)$ de $\mathbf{M}(R_0, i_0, S_0, d_0)$ avec $r_h(M_k, \widetilde{g}_k, Q) = \varepsilon_k$ qui tend vers 0. On prend alors $g_k = \varepsilon_k^{-2} \widetilde{g}_k$ et alors, pour tout k, $r_h(M_k, g_k, Q) = 1$. De plus, toujours avec la métrique g_k on a pour $k \to \infty$

$$(29) \qquad \| \operatorname{Ric}_k \|_{L^\infty(M_k)} \to 0, \ \| \operatorname{Ric}_{\partial M_k} \|_{L^\infty(\partial M_k)} \to 0, \ \| H_k \|_{Lip(\partial M_k)} \to 0,$$

et

$$(30) \qquad i_k \to \infty, \ i_{\partial M_k} \to \infty, \ i_{b,M_k} \to \infty.$$

Soit $p_k \in M_k$ tel que

$$(31) \qquad r_h(p_k, g_k, Q) = 1.$$

Par le théorème 4, où plutôt dans le cadre de la remarque qui le suit, on sait qu'il existe une sous-suite qu'on notera encore (M_k, g_k, p_k) qui converge vers

(M, g, p) dans la topologie pointée C^r , et ce pour tout $r \in (1, 2)$.

Notons $t_k(x) = \mathrm{dist}_k(x, \partial M_k)$ où la distance est celle induite par g_k sur M_k. Alors, on a deux possibilités : soit $t_k(p_k)$ reste bornée soit elle tend vers $+\infty$. On a le lemme suivant qu'on démontrera plus tard :

Lemme 5

Dans le cadre qui est le notre dans la démonstration de la proposition 11, on a, si $t_k(p_k)$ tend vers l'infini, alors la limite (M, g) est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne classique et, si $t_k(p_k)$ reste bornée, (M, g) est isométrique à $\mathbb{R}^n_+$ avec sa métrique euclidienne usuelle.

Etudions les deux cas séparément.

- Si $t_k(p_k) \to \infty$. Grâce au lemme 5 et à la définition de la convergence pointée des variétés riemanniennes, il existe des voisinages U_k de p_k dans M_k qu'on peut identifier à $B(0, 5) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \|< 5\}$ avec $p_k = 0$ et sur lesquels g_k tend vers la métrique euclidienne pour la norme C^r qu'on notera δ.

  Comme le but est d'obtenir une contradiction sur le rayon harmonique, on cherche des coordonnées harmoniques sur $B(0, 5)$. Si $(x^\nu)_{1\leq\nu\leq n}$ sont les coordonnées cartésiennes standards de $\mathbb{R}^n$, on est ramené à résoudre le problème suivant

$$\begin{aligned} \Delta_k u_k^\nu &= 0 \text{ sur } B(0, 5) \\ u_k^\nu &= x^\nu \text{ sur } \partial B(0, 5), \end{aligned}$$

  où Δ_k est le laplacien défini avec la métrique g_k. De ce problème on en tire un autre :

$$\begin{aligned} \Delta_k(u_k^\nu - x^\nu) &= f_k^\nu \text{ sur } B(0, 5) \\ u_k^\nu - x^\nu &= 0 \text{ sur } \partial B(0, 5), \end{aligned}$$

  où $f_k^\nu = -g_k^{-1/2}\partial_i(g_k^{1/2} g_k^{i\nu})$.

  Comme g_k tend vers δ en norme C^r, alors f_k^ν tend vers 0 en norme C^{r-1} sur $B(0, 5)$. Et, on peut donc utiliser le théorème 1, sur les estimations de Schauder, pour affirmer que $u_k^\nu - x^\nu \to 0$ dans $C^{r+1}(B(0, 5))$ quand $k \to \infty$. Donc pour un k assez grand, $(u_k^1, ..., u_k^n)$ forment un système de coordonnées harmoniques sur U_k. On note g_{ij}^k les composantes de g_k dans ces coordonnées.

  On a alors

$$\| g_{ij}^k - \delta_{ij} \|_{C^r(B(0,4))} \longrightarrow 0, \ k \longrightarrow \infty. \tag{32}$$

Mais pour retomber sur la notion de rayon C^2_*-harmonique, il nous faudrait une convergence en norme C^2_*. Ce qu'on va obtenir en utilisant l'équation (9) (cf proposition 9) qui donne ici :

$$\Delta_k(g^k_{ij} - \delta_{ij}) = F^k_{ij},$$

où $F^k_{ij} = B_{ij}(g_{lm}, \nabla g_{lm}) - 2\,\mathrm{Ric}^k_{ij}$.

En utilisant l'hypothèse (29) et la convergence (32) on obtient $\| F^k_{ij} \|_{L^\infty(B(0,4))}$ tend vers 0. Et alors par un résultat de régularité elliptique on obtient

$$\| g^k_{ij} - \delta_{ij} \|_{C^2_*(B(0,3))} \longrightarrow 0,\ k \longrightarrow \infty. \tag{33}$$

Ce qui suffit pour dire que le rayon C^2_*-harmonique $r_h(p_k, g_k, Q)$ est ≥ 3 pour k assez grand, ce qui contredit (31).

- Dans le second cas, $t_k(p_k)$ reste bornée et la variété limite est $\mathbb{R}^n_+$. Sans détailler, la démarche est la suivante. Comme dans le premier cas on commence par construire des coordonnées harmoniques, cette fois sur une demi-boule, en commençant par en construire sur le bord. Puis, on obtient une convergence C^2_* des composantes de la métrique dans ces coordonnées, excepté pour les composantes faisant intervenir la coordonnée orthogonale au bord. Pour cette dernière on utilise les mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème 2 (cf lemmes 2 et 4), ie passage par g^{-1} et équations du type Neumann au bord. On obtient alors un rayon harmonique strictement plus grand que 1 ce qui constitue la contradiction cherchée et achève la démonstration de la proposition 11 modulo le lemme 5 $\circ$

Démontrons le lemme 5 :
On rappelle que les hypothèses sont (30) et (30) et qu'il s'agit de montrer que la limite (M, g) est isométrique soit à $\mathbb{R}^n$, soit à $\mathbb{R}^n_+$.

- Premier cas : $t_k(p_k) \to \infty$. Dans ce cas l'hypothèse (29) implique que $\mathrm{Ric}_M = 0$ presque partout. Et alors, l'équation (9) permet de dire que $g \in C^\infty$ dans des coordonnées harmoniques locales. Par définition de la convergence on a que M est complète et que donc toute géodésique unitaire $\gamma(t)$ d'origine p est définie sur M pour tout $t \in \mathbb{R}$.

  Montrons que pour tout $T \in (0, \infty)$, γ minimise les chemins de $\gamma(-T)$ à $\gamma(T)$. Par hypothèses, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ il existe des ouverts de M_k difféomorphes à $B(p, 6T)$ dans M, tels que $p_k \to p$, $g_k \to g$ dans $C^r(B(p, 6T))$, et enfin pour tout $x \in B(p, 2T), i(x, g_k) \geq 3T$.

Sur M, il existe $c_0 > 0$ tel que $i(p,g) \geq c_0$. Posons $\gamma(c_0) = q$. Sur (M_k, g_k) on a des géodésiques unitaires γ_k définies pour $t \in [-2T, 2T]$, telles que, via les difféomorphismes, $\gamma_k(0) = p, \gamma_k(c_k) = q$, avec $c_k \to c_0$. Par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite qui converge uniformément sur $[-2T, 2T]$, on notera : $\gamma_k \to \sigma$. Alors σ est une géodésique de (M,g) qui vérifie $\sigma(0) = p, \sigma(c_0) = q$ et donc $\sigma = \gamma$. De plus comme, pour tout $x \in B(p, 2T) i(x, g_k) \geq 3T$, on a, pour $k \geq k_0$, $\mathrm{dist}_k(\gamma_k(-T), \gamma_k(T)) = 2T$, et donc à la limite $\mathrm{dist}(\gamma(-T), \gamma(T)) = 2T$.

Pour conclure, on utilise le théorème de Cheeger-Gromoll ([PE]) :

Théorème 5
Soit (N,h) une variété riemannienne complète de dimension ≥ 2 qui satisfait $\mathrm{Ric} \geq 0$ *et qui contient une géodésique définie sur $\mathbb{R}$ en entier (on dira une ligne), minimisant la distance entre deux quelconques de ses points. Alors (N,h) est isométrique à $N1 \times \mathbb{R}^k$ où $N1$ ne contient pas de ligne et $\mathbb{R}^k$ est donné avec sa métrique euclidienne standard.*

Ici $N1$ est nul d'où le résultat dans le premier cas.

- Deuxième cas : $t_k(p_k) \leq K < \infty$. Soit $q_k \in \partial M_k$ le point le plus proche de p_k sur ∂M_k. Par l'hypothèse (26), pour k assez grand q_k est défini de manière unique. On a aussi $(\partial M_k, g_k, q_k)$ qui converge en topologie C^r vers $(\partial M, g, q)$, et $\mathrm{dist}(p,q) = \lim t_k(p_k)$. Les hypothèses permettent d'obtenir :
$$\mathrm{Ric}_M = 0, \mathrm{Ric}_{\partial M} = 0, H\mid_{\partial M} = 0.$$
Dont on tire notamment que g est C^∞ dans des coordonnées locales harmoniques.

On va maintenant établir deux équations :

Lemme 6
En notant cette fois H_k la trace de l'endomorphisme de Weingarten A_k de la surface $S = \{t_k = c\}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_k t_k &= H_k \text{ sur } S \\ \partial_t H_k &= -\mathrm{TR}\, A_k^2 - \mathrm{Ric}_k(\partial_t, \partial_t) \text{ dans des coordonnées normales } (z, t_k), z \in \partial M. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 6 (voir [PE]) : Par définition du laplacien

$$\Delta_k t_k = -\mathrm{TR}(\nabla^2 t_k) = -\sum \nabla^2_{e_i, e_i} t_k - \nabla^2_{\nabla t_k, \nabla t_k} t_k,$$

avec (e_i) un repère orthonormé normal de S. Or

$$\nabla^2_{e_i,e_i} t_k = g_k(\nabla^2 t_k(e_i), e_i) = g_k(\nabla_{e_i}(\nabla t_k), e_i)$$

On a aussi

$$\nabla_{e_i}(g_k(\nabla t_k, e_i)) = g_k(\nabla_{e_i}(\nabla t_k), e_i) + g_k(\nabla t_k, \nabla_{e_i} e_i).$$

Or comme $e_i \in TS$ et que $\nabla t_k \perp S$, on a $g_k(\nabla t_k, e_i) = 0$ dont on tire :

$$\nabla^2_{e_i,e_i} t_k = -g_k(\nabla t_k, \nabla_{e_i} e_i).$$

De plus, pour tout champ de vecteur Y, on a

$$\begin{aligned} g_k(\nabla^2_{\nabla t_k, \nabla t_k} t_k, Y) &= g_k(\nabla^2 t_k(\nabla t_k), Y) \\ &= g_k(\nabla t_k, \nabla^2 t_k(Y)) \\ &= g_k(\nabla t_k, \nabla_Y(\nabla t_k)) \\ &= \frac{1}{2} D_Y g_k(\nabla t_k, \nabla t_k) \\ &= \frac{1}{2} D_Y 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\nabla^2_{\nabla t_k, \nabla t_k} t_k = 0$.

D'un autre côté,

$$H_k = \sum II_S(e_i, e_i),$$

et par définition de la seconde forme fondamentale d'une sous-variété,

$$II_S(e_i, e_i) = g_k(-\nabla t_k, \nabla_{e_i} e_i).$$

D'où la première égalité du lemme 6.

Pour la seconde égalité, en notant $N = \nabla t_k$, on montre d'abord,

$$\nabla_N A_k + A_k^2 = R(N, .)N \tag{34}$$

Pour tout champ de vecteur Y, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\nabla_N A_k)(Y) + A_k^2(Y) &= \nabla_N(A_k(Y)) - A_k(\nabla_N Y) + A_k(A_k(Y)) \\ &= \nabla_N(\nabla_Y N) - \nabla_{\nabla_N Y} N + \nabla_{\nabla_Y N} N \\ &= \nabla_N \nabla_Y N - \nabla_{[N,Y]} N \\ &= R(N, Y)N + \nabla_Y \nabla_N N \end{aligned}$$

Et comme on vient de le voir $\nabla_N N = 0$, ce qui donne l'équation (34). Il reste ensuite à prendre la trace pour obtenir la deuxième égalité cherchée.

Revenons à la démonstration du deuxième cas du lemme 5. Par hypothèse, il existe $\varepsilon_k \to 0$ tel que

$$\| \operatorname{Ric}_k(\partial_t, \partial_t) \|_{L^\infty(M_k)} \leq \varepsilon_k, \ \mid H_k(0) \mid \leq \varepsilon_k.$$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (qui donne $(\mathrm{TR}\, A)^2 \leq (n-1)\,\mathrm{TR}(A^2)$),

$$\partial_t H_k \leq -\frac{1}{n-1} H_k^2 + \varepsilon_k. \tag{35}$$

Si on note μ_k la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \mu_k &= -\frac{1}{n-1}\mu_k^2 + \varepsilon_k, \\ \mu_k(0) &= \varepsilon_k, \end{aligned}$$

on a alors, car H_k est une sous-solution du problème précédent : pour tout $0 \leq t \leq i_{b,M_k}$,

$$H_k(t,z) \leq \mu_k(t).$$

En étudiant μ_k on obtient une majoration de H_k :

$$H_k(t,z) \leq \max(\sqrt{(n-1)\varepsilon_k}, \varepsilon_k). \tag{36}$$

On cherche maintenant une minoration de H_k. Soit $\delta > 0$ et supposons qu'il existe $t_0 \leq \frac{i_{b,M_k}}{2}$ et $z \in \partial M$ pour lesquels $H_k(t_0, z) \leq -\delta$ ($\spadesuit$). Prenons k assez grand afin d'avoir $\delta^2 > 2(n-1)\varepsilon_k$; alors par (30) $H_k(t)$ a une dérivée négative et donc $H_k(t,z) < -\delta$ pour tout $t \in [t_0, i_{b,M_k})$. Et donc, toujours grâce à l'inégalité (35) on a

$$\partial_t H_k \leq -\frac{1}{2(n-1)} H_k^2, \ t \geq t_0. \tag{37}$$

Puis en intégrant (37) en sachant que $H_k(t_0) \leq -\delta$ on obtient

$$H_k(t) \leq \frac{2(n-1)}{(t-t_0) - 2(n-1)/\delta}.$$

Mais ceci implique l'explosion de H_k dans l'intervalle $[t_0, t_0 + 2(n-1)/\delta]$ qui est inclus dans $[0, i_{b,M_k})$ quand $\delta > 4(n-1)/i_{b,M_k}$, ce qui contredit la majoration obtenue précédemment (cf (36)). Donc l'hypothèse faite précédemment (♠) est fausse.

Finalement il existe donc $\delta_k \to 0$ tel que

$$| H_k(t) | \leq \delta_k, \text{ pour tout } 0 \leq t \leq \frac{i_{b,M_k}}{2}. \tag{38}$$

Ensuite, en notant $t(x) = \mathrm{dist}(x, \partial M)$, on a, en utilisant que $g_k \to g$ dans C^r, $t_k \to t$ dans C^0. Après, en utilisant la première équation du lemme 6 et (38), ainsi que des résultats d'analyse donnés en annexe de l'article [AKKLT], on arrive à obtenir que $H_k \to H$ dans un certain L^p, $\frac{n}{n-1} \leq p < \infty$. D'où

$$H(t, z) = 0, \forall t \geq 0.$$

De plus, comme dans le lemme 6, on a

$$\partial_t H + \mathrm{TR}\, A^2 = -\mathrm{Ric}_M(\partial_t, \partial_t) = 0,$$

dont on tire que $\mathrm{TR}\, A^2 = 0$ et que donc A est nul.
De plus

$$\partial_t g_{ij} = 2A_{li} g_{lj} = 0.$$

Donc

$$g_{ij}(t, z) = g_{ij}(0, z), \forall z \in \partial M.$$

Donc M est isométrique à $[0, \infty) \times \partial M$. Or par le premier cas on sait que ∂M est isométrique à $\mathbb{R}^{n-1}$, et donc M est bien isométrique à $\mathbb{R}^n_+$.

Ce qui achève la démonstration du lemme 5 $\circ$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 11 $\circ$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3

$\square$

6 Problème inverse de Gelfand

Fixons des notations. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe, à bord non vide, avec $g \in C^2_*$. Soit Δ^N le laplacien de Neumann. On note $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ les valeurs propres de $-\Delta^N$ et $\phi_1 = \mathrm{Vol}(M)^{-1/2}, \phi_2, ...$

les fonctions propres orthonormalisées correspondantes.

Le problème inverse de Gelfand consiste à reconstruire (M,g) à partir de ses données spectrales au bord, i.e, l'ensemble $\{\partial M, \{\lambda_k, \phi_k \mid_{\partial M}\}_{k=1}^{\infty}\}$.

Enonçons le résultat principal de cette partie :

Théorème 6
Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, à bord non vide, avec $g \in C_*^2$. Alors les données spectrales au bord, $\{\partial M, \{\lambda_k, \phi_k \mid_{\partial M}\}_{k=1}^{\infty}\}$, déterminent la variété M et sa métrique g de manière unique.

Démontrons donc le théorème.

6.1 Unicité de M à homéomorphisme près

Posons quelques notations. Soit Γ un ouvert de ∂M et $t \geq 0$. On pose

$$M(\Gamma, t) = \{x \in M : d(x,\Gamma) \leq t\}.$$

Et si $\underline{\Gamma} = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_m\}$ est un ensemble fini d'ouverts du type précédent, et $\underline{t}^+ = (t_1^+, ..., t_m^+)$, $\underline{t}^- = (t_1^-, ..., t_m^-)$ deux vecteurs à coordonnées positives, on note

$$M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-) = \bigcap_{i=1}^{m} (M(\Gamma_i, t_i^+) \setminus M(\Gamma_i, t_i^-)) \subset M.$$

On définit ensuite la transformation de Fourier F des fonctions de $L^2(M)$ par

$$F(u) = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2, \ u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(x), \ u_k = (u, \phi_k)_{L^2(M)}.$$

Puis on note $L^2(M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-))$ les fonctions de $L^2(M)$ qui sont à support dans $M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)$, et enfin

$$L(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-) = FL^2(M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)) \subset l^2.$$

On considère l'équation des ondes suivante :

$$\begin{aligned}
(\partial_t^2 - \Delta) u^f(x,t) &= 0 \text{ sur } M \times \mathbb{R}^+ \\
u^f \mid_{t=0} &= 0 \\
\partial_t u^f \mid_{t=0} &= 0 \\
Nu^f \mid_{\partial M \times \mathbb{R}^+} &= f \in C_0^1(\Gamma \times (0,T))
\end{aligned}$$

avec N le champ de vecteur normal extérieur à ∂M.

Un théorème de Tataru, donné dans [KKL], implique le résultat suivant,

Proposition 12
Pour tout $T > 0$, l'ensemble $\{u^f(T), f \in L^2(\Gamma \times (0,T))\}$ est un sous-espace dense de $L^2(M(\Gamma, T))$.

Ensuite, on obtient les coefficients de Fourier $u_k^f(t)$ d'une onde $u^f(.,t)$ en fonction des données spectrales au bord grâce à la formule suivante de Blagovestchenskii :

$$u_k^f(t) = \int_0^t \int_{\partial M} f(x,t') \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-t')}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k(x) dS_g dt', \tag{39}$$

qui résulte de ce qui suit :

Partons du second membre de (39), il vaut

$$\int_0^t \int_{\partial M} f(x,t') \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-t')}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k(x) dS_g dt' = \int_0^t \int_{\partial M} N u^f(x,t') \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-t')}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k(x) dS_g dt'$$

Puis avec la formule de Green on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} N u^f(x,t') \phi_k(x) dS_g &= \int_M [\partial_t^2 u^f(x,t') \phi_k(x) - u^f(x,t') \Delta \phi_k(x)] dV(x) \\ &= \int_M [\partial_t^2 u^f(x,t') + \lambda_k u^f(x,t')] \phi_k(x) dV(x) \end{aligned}$$

et en intégrant deux fois par parties on a

$$\int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-t')}{\sqrt{\lambda_k}} \partial_t^2 u^f(x,t') dt' = u^f(x,t) - \int_0^t u^f(x,t') \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k}(t-t') dt'.$$

D'où après simplifications,

$$\int_0^t \int_{\partial M} f(x,t') \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-t')}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k(x) dS_g dt' = \int_M u^f(x,t) \phi_k(x) dV(x) = u_k^f(t).$$

On peut donc en tirer la conclusion suivante,

Proposition 13
Pour tout $\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-$ avec m arbitraire, les données spectrales au bord déterminent entièrement $L(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)$.

On en déduit, en particulier, que les données spectrales au bord déterminent si $M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)$ contient une boule ouverte, car alors $L(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-) \neq 0$.

On s'intéresse ensuite à l'image de l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} R : M & \longrightarrow & C(\partial M) \\ x & \longrightarrow & r_x = d(x, .). \end{array}$$

Soit $h \in C(\partial M)$; on cherche à savoir si h réalise la distance à un point $x \in M$. Pour ce, on prend, pour $j = 1, ..., m, z_j \in \partial M$ ainsi que leurs voisinages $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, et que des réels $t_j^{\pm} = h(z_j) \pm \frac{1}{m}$. L'existence de x tel que $h = d(x, .)$ est équivalente à : pour tout m $L(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-) \neq 0$.

Donc les données spectrales au bord déterminent l'image de R.

De plus R est Lipschitzienne donc continue.

Et R est injective. En effet, si $r_x = r_y$, soit $z \in \partial M$ un point de minimum pour les deux fonctions (∂M est compacte). Alors x et y sont sur la géodésique (cf corollaire 1 de la proposition 10) partant de z, normalement à ∂M, à une distance $r_x(z) = r_y(z)$. Donc $x = y$.
Et comme M est compacte, R est un homéomorphisme sur son image.

On a montré le résultat suivant :

Proposition 14
Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) vérifiant les hypothèses du théorème 6 et ayant les mêmes données spectrales au bord. Alors elles sont homéomorphes.

En effet, on peut construire comme R, R_1 et R_2 qui auront même image déterminée par les données spectrales communes. Et M_1 et M_2 sont alors toutes les deux homéomorphes à cette image et donc homéomorphes entre elles $\circ$

6.2 Unicité de la métrique

Il s'agit de montrer l'unicité de la structure de variété différentielle, ainsi que l'unicité de la métrique riemannienne des variétés vérifiant les hypothèses du théorème 6, une fois les données spectrales au bord fixées.

Si on appelle $P(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)$ la projection de l^2 sur $L(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)$ dont on sait par la proposition 13 qu'elle est déterminée par les données spectrales au bord, et (e_i) la base canonique de l^2. On a alors

$$(P(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)e_i, e_j) = \int_{M(\underline{\Gamma}, \underline{t}^+, \underline{t}^-)} \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}dV(x), \tag{40}$$

et donc

$$(41)\quad (P(\underline{\Gamma},\underline{t}^+,\underline{t}^-)e_1,e_1)=\int_{M(\underline{\Gamma},\underline{t}^+,\underline{t}^-)}\mid \phi_1(x)\mid^2 dV(x)=\frac{\mathrm{Vol}(M(\underline{\Gamma},\underline{t}^+,\underline{t}^-))}{\mathrm{Vol}(M)}.$$

Ensuite, si on prend une suite $(\underline{\Gamma}_k,\underline{t}_k^+,\underline{t}_k^-)$, avec la dimension des vecteurs $t_k^{\pm}$ qui tend vers ∞ quand $k\to\infty$, et telle que $M(\underline{\Gamma}_k,\underline{t}_k^+,\underline{t}_k^-)$ tende vers $\{x\}$, on obtient grâce aux formules (40) et (41)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\phi_1(P(\underline{\Gamma}_k,\underline{t}_k^+,\underline{t}_k^-)e_1,e_j)(P(\underline{\Gamma}_k,\underline{t}_k^+,\underline{t}_k^-)e_1,e_1)^{-1} &= \lim_{k\to\infty}(\mathrm{Vol}(M(\underline{\Gamma}_k)))^{-1}\int_{M(\underline{\Gamma}_k)}\phi_j(x')dV(x')\\ (42)\qquad\qquad &= \phi_j(x).\end{aligned}$$

Et comme connaître ϕ_1 sur le bord revient à la connaître partout vu qu'elle est constante, on peut dire qu'à partir des données spectrales au bord, on peut trouver la valeur des fonctions propres $\phi_k(x)$ en tout point x de M.

On appelle Φ l'espace vectoriel engendré par les ϕ_k.

Lemme 7

Sous les hypothèses du théorème 6, Φ est dense dans $\{u\in H^{s,p}(M), Nu\mid_{\partial M}=0\}$ pour tout $s\in[0,3), p\in(1,\infty)$. De plus, pour $x\in M^{int}$ il existe n indices $k(1),...,k(n)$ (qui dépendent de x) et un voisinage U de x tel que $\phi_{k(1)},...,\phi_{k(n)}$ forment un système de coordonnées C^3_* sur U.

preuve : En admettant le premier point (voir [AKKLT]), démontrons le second. Déjà, grâce au premier point on a que $(\heartsuit)$ $C^2_0(M^{int})$ est inclus dans la clôture de Φ dans $C^2(M)$. En effet $C^2_0(M^{int})\subset\{u\in H^{s,p}(M), Nu\mid_{\partial M}=0\}$ pour tout $s\in[0,3), p\in(1,\infty)$; et donc par le premier point, pour $f\in C^2_0(M^{int})$ il existe une suite u_k de Φ qui tend vers f en norme $H^{s,p}$. Et par injection de Sobolev (proposition 2), il existe s et p dans $[0,3)\times(1,\infty)$ tels que $H^{s,p}\subset C^2$ donc la convergence a lieu dans C^2.

Ensuite, soit $x\in M^{int}$ et $(x^1,...,x^n)$ un système de coordonnées locales près de x. On considère l'application

$$\begin{aligned}T_x:\Phi &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ u &\longrightarrow (\partial_1 u(x),...,\partial_n u(x)).\end{aligned}$$

Il vient de l'inclusion précédente $(\heartsuit)$ que $T_x(\Phi)=\mathbb{R}^n$ et que donc il existe des indices $k(1),...,k(n)$ tels que $\nabla\phi_{k(1)}(x),...,\nabla\phi_{k(n)}(x)$ soient linéairement indépendants. Ce qui prouve le second point car les ϕ_k, qui vérifient $\Delta^N\phi_k=\lambda_k\phi_k$ sont dans $C^3_*(M^{int})$ car la métrique est C^2_* et qu'on peut utiliser un résultat de type estimations de Schauder. $\circ$

Proposition 15
Soient (M_1,g_1), (M_2,g_2) vérifiant les hypothèses du théorème 6 et ayant les mêmes données spectrales au bord. Alors l'homéomorphisme π de M_1 sur M_2, dont l'existence découle de la proposition 14, est un C^2-difféomorphisme de M_1^{int} sur M_2^{int} et il vérifie $\pi^* g_2 = g_1$.

preuve :

- Si on note (ϕ_k) les fonctions propres sur M_1 et $(\widetilde{\phi_k})$ celles sur M_2, avec (42) on a
$$\phi_k(x) = \widetilde{\phi}_k(\pi(x)).$$
Soit $p \in M_1^{int}$, d'après le lemme 7, il existe des indices $k(1),...,k(n)$ tels que $\widetilde{\phi}_{k(1)},...,\widetilde{\phi}_{k(n)}$ forment un système local de coordonnées sur un voisinage de $\widetilde{p} = \pi(p)$. Et donc pour x assez proche de p
$$x \to (\phi_{k(1)}(x),...,\phi_{k(n)}(x)) = (\widetilde{\phi}_{k(1)}(\pi(x)),...,\widetilde{\phi}_{k(n)}(\pi(x))) \to \pi(x)$$
est une application C^2 comme composée de deux applications C^2. Finalement π est C^2 sur M_1^{int} et en échangeant le rôle de M_1 et de M_2 on obtient que π^{-1} est aussi C^2.
- Le deuxième point revient à démontrer l'unicité de la métrique sur M_1. Pour simplifier les notations on note $M = M_1$ et $(x^1,...,x^n)$ un système de coordonnées C^3_* sur un ouvert $U \subset M^{int}$ comme obtenu dans le lemme 7. Pour tout k on a alors
(43)
$$-g^{ij}(x)\partial_i\partial_j\phi_k(x) - b^i\partial_i\phi_k(x) = \lambda_k\phi_k(x), \text{ avec } b^i = g^{-1/2}\partial_j(g^{1/2}g^{ij}).$$
Or les ϕ_k ainsi que leurs dérivées sont connues, tout comme les λ_k ; on peut donc considérer (43) comme un système d'équations d'inconnues $g^{ij}(x) = g^{ji}(x), b^i(x)$. De la même façon que dans la démonstration du lemme 7 on peut regarder
$$\begin{array}{rcl} S_x : \Phi & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+n(n+1)/2} \\ u & \longrightarrow & (\partial_i u(x), \partial_i\partial_j u(x); 1 \leq i \leq j \leq n), \end{array}$$
et déduire grâce à l'inclusion ($\heartsuit$) qu'elle est surjective. Et donc (43) est un système qui admet une unique solution. $\circ$

Ce qui achève la démonstration du théorème 6

$\square$

Remarque 7
Dans l'article [AKKLT], les auteurs montrent que π peut être prolongé en un C^2-difféomorphisme de M_1 sur M_2.

7 Stabilité du problème inverse

Introduisons des notations. On pose $M_X(C^2_*)$ l'ensemble des variétés riemanniennes M compactes, connexes, à bord non vide X et de métrique dans $C^2_*(M)$. Et on note B_X l'ensemble des suites $\{\mu_j, \psi_j; j \geq 1\}$ avec $\mu_j \in \mathbb{R}^+$ croissante, tendant vers $+\infty$ et $\psi_j \in L^2(X)$, le tout modulo la relation d'équivalence suivante : $\{\mu_j, \psi_j\} \sim \{\mu_j, \widetilde{\psi_j}\}$ si quand $\mu_{k_0} = ... = \mu_{k_1}$ on a

$$\psi_j(x) = \sum_{k=k_0}^{k_1} \alpha_{jk} \widetilde{\psi}_k(x), \quad j = k_0, ..., k_1,$$

où (α_{jk}) est une matrice unitaire $l \times l$ avec $l = k_1 - k_0 + 1$.

On s'intéresse à l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} D : M_X(C^2_*) & \longrightarrow & B_X \\ (M, g) & \longrightarrow & \{\lambda_j, \phi_j \mid_X\}_{j=1}^{\infty}, \end{array}$$

qui à une variété riemannienne à bord associe ses données spectrales au bord. Avec le théorème 6, on sait que D est injective.

Sur $M_X(C^2_*)$ on peut mettre la topologie de la convergence C^r pour $r \in (1, 2)$. Sur B_X on peut mettre la topologie suivante :

On dira que $\{\mu_j^\nu, \psi_j^\nu\} \longrightarrow \{\mu_j, \psi_j\}$ quand $\nu \longrightarrow \infty$, si $\mu_j^\nu \longrightarrow \mu_j$ pour tout j et si pour μ_k de multiplicité l $(\mu_{k-1} < \mu_k = ... = \mu_{k+l-1} < \mu_{k+l})$ il existe des matrices unitaires de taille $l \times l$, $(\alpha_{ij}^\nu)_{k \leq i,j \leq k+l-1}$ telles que

$$\sum_{j=k}^{k+l-1} \alpha_{ij}^\nu \psi_j^\nu \longrightarrow \psi_i \text{ dans } L^2(X).$$

En utilisant ces topologies on peut montrer que D est continue.

Mais a priori D n'est pas un homéomorphisme ; c'est typiquement ce qui arrive quand on est confronté à un problème mal posé. L'idée est alors de restreindre le domaine de D à un compact. C'est le théorème 3 qui nous donne ce compact : il suffit de prendre $\overline{\mathbf{M}_X(R_0, i_0, S_0, d_0)}$ (où le X est là pour rappeler que c'est le bord de M) qui est bien compact pour la topologie $C^r, r \in (1, 2)$. On obtient que D est un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{M}_X(R_0, i_0, S_0, d_0)}$ sur son image. ∘

Références

[AKKLT] M. Anderson, A. Katsuda, Y. Kurylev, M. Lassas, M. Taylor. Boundary regularity for the Ricci equation, geometric convergence, and Gelfand's inverse boundary problem. arXiv :math.SP/0211376 (prépublication) puis Inventiones mathematicae 09/06/2004 DOI :10.1007/s00222-004-0371-6

[BREZ] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Paris, 1999. Dunod.

[DTK] D. De Turck, J. Kazdan. Some regularity theorems in riemannian geometry. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. , IV Sér. 14,249-260, 1981.

[GER.AL] P. Gérard, S. Alinhac. Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser. 1991. EDP Sciences.

[KKL] A. Katchalov, Y. Kurylev, M. Lassas. Inverse boundary spectral problems. CRC Press 2001.

[PE] P. Petersen. Riemannian geometry. New York, 1998. Springer.

[TAYL] M. Taylor. Partial differential equations. Vols 1-3. New York, 1996. Springer.

[TRIEB] H. Triebel. Theory of function spaces II. 1992. Birkhäuser.