Chapitre 9 : Relations d'ordre : Exercices

Exercice 1.

Une relation binaire transitive et symétrique est-elle nécessairement réflexive ?

Exercice 2.

Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$* et on note $cl_{\mathcal{R}}(x)$ l'ensemble :
$$cl_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ x\mathcal{R}y\}.$$
Calculer $cl_{\mathcal{R}}(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. La relation binaire $\mathcal{R}_1$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par
$$\forall ((p,q),(p',q')) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2,\ \ (p,q)\mathcal{R}_1(p',q') \Longleftrightarrow \Big(p \leq p' \ \text{ et } q \leq q'\Big)$$
est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'ordre totale ?
2. La relation binaire $\mathcal{R}_2$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par
$$\forall ((p,q),(p',q')) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2,\ \ (p,q)\mathcal{R}_2(p',q') \Longleftrightarrow \Big(p < p' \ \text{ ou } (p = p' \ \text{ et } q \leq q')\Big)$$
est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'ordre totale ?
3. Selon quelle relation d'ordre sont classés les pays quant au nombre de médailles remportées aux jeux olympiques ?
4. Comment sont ordonnés les mots dans un dictionnaire ?

Exercice 4.

On définit une relation binaire $\preceq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x \preceq y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ y = x^n.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

Exercice 5.

On définit une relation binaire $\preceq$ sur $H = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$\forall (z,z') \in H^2,\ z \preceq z' \Longleftrightarrow \Big(|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z'))\Big).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 6.

Déterminer (s'ils existent) les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands ou plus petits éléments des ensembles ou familles ci-dessous :

1. Les ensembles $A =]-1, 2]$, $B =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]3, 4[\cup\{7\}$ et $C = \mathbb{R}_+^*$.
2. Les familles $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(2^{(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7.

Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{m,n} = 1/m + 1/n$, et on note $U = \{u_{m,n}; (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\sup U$ et $\inf U$.

Exercice 8.

Pour $f : x \to 3x$ et $g : x \to 1 - 2x$, déterminer sur $I = [0, 1]$ les bornes supérieures et inférieures des fonctions f, g et $f + g$. Qu'observe t'on ?

Exercice 9.

Soit $A = \left\{E(x) + E(\frac{1}{x})\ ;\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. Étudier $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 10.

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.
2. Déterminer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.
3. On suppose $A \cap B$ non vide. Comparer $\sup(A \cap B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 11.

Soit f une application croissante de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$. Démontrer qu'il existe au moins un réel $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$. (*a est un point fixe de f, du coup le résultat précédent est appelé un (il y en a toute une floppée) théorème de point fixe.*)

Exercice 12.

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides. Démontrer qu'une condition suffisante pour que $I \cup J$ soit un intervalle est que $I \cap J \neq \emptyset$. Cette condition est-elle nécessaire ?