Chapitre 8 : Coniques : Exercices

Exercice 1.

Soient $p > 0$ et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé. Trouver la longueur minimale d'une corde de $\mathcal{P}$ normale à $\mathcal{P}$ en une de ses deux extrémités.

Exercice 2.

Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et $\mathcal{Q}$ la parabole d'équation $x^2 = 2qy$. Trouver les tangentes communes à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 3.

Soient $p > 0$ et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé et F son foyer. Une droite variable D passant par F coupe $\mathcal{P}$ en deux points notés A et B. Déterminer le lieu du centre Ω du cercle circonscrit au triangle AOB.

Exercice 4.

Soient A, B deux points distincts du plan et I le milieu de $[A, B]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que :

$$MI^2 = MA \times MB.$$

Exercice 5.

Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole, $M \in \mathcal{H}$, H, H' les projetés orthogonaux de M sur les deux asymptotes de $\mathcal{H}$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ ne dépend pas du point $M \in \mathcal{H}$.

Exercice 6.

1) Soient $\mathcal{E}$ une ellipse, F, F' ses foyers et $M \in \mathcal{E}$. Montrer que la tangente en M à $\mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure des droites (MF), (MF').

2) Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole, F, F' ses foyers et $M \in \mathcal{H}$. Montrer que la tangente en M à $\mathcal{H}$ est la bissectrice intérieure des droites (MF), (MF').

3) Soient $\mathcal{P}$ une parabole, F son foyer, Δ son axe et $M \in \mathcal{P}$. Montrer que la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la bissectrice extérieure des droites (MF) et Δ_M, où Δ_M est la parallèle à Δ passant par M.

Exercice 7.

Soit $ABCD$ un rectangle. Déterminer le lieu des points M tels que les cercles circonscrits aux triangles MAB, MCD aient le même rayon.

Exercice 8.

Reconnaître et tracer les courbes suivantes dont on donne une équation polaire :

1) $r(\theta) = \dfrac{4}{3 + \cos(\theta)}$

2) $r(\theta) = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \frac{\pi}{3})}$

3) $r(\theta) = \dfrac{3}{1 + 2\sin\theta}$

Exercice 9.

Soient $\mathcal{E}$ une ellipse dont F est un foyer. Une droite variable D passant par F coupe $\mathcal{E}$ en deux points M et N.

1) Montrer que $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ ne dépend pas de la droite D choisie.

2) Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FN^2}$ lorsque D varie.

Exercice 10.

Déterminer la nature, les axes, l'équation réduite des coniques suivantes dont on donne une équation cartésienne dans un repère orthonormé.

1) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$
2) $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$
3) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$
4) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$