Chapitre 7 : Courbes paramétrées : Exercices

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g des applications $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que les applications suivantes sont $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer leur dérivée :

$$\begin{aligned} f.\,g\ &: I \ \rightarrow\ \mathbb{R} \\ \|\, f\,\| &: I \ \rightarrow\ \mathbb{R} \\ \det(f,g)\ &: I \ \rightarrow\ \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $t \to M(t)$ un mouvement tel que $t \to \|\, \overrightarrow{OM}(t)\, \|$ soit constant. Montrer que $\overrightarrow{OM}(t)$ et la vitesse sont orthogonaux.

Exercice 3. Si le mouvement $t \to M(t)$ est circulaire de centre O et d'accélération de centre O, montrer que le mouvement est uniforme.

Exercice 4. Étudier les courbes paramétrées $f = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où x et y sont donnés en fonction du paramètre t par les formules suivantes :

$$1) \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \\ y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ \\ y(t) = \tan 3t \end{cases}$$

Les trois premières ont un petit nom : 1) *: Strophoïde droite,* 2) *: Lemniscate de Bernoulli,* 3) *: Folium de Descartes.*

Exercice 5. Étudier les courbes paramétrées suivantes ainsi que leurs points multiples.

$$1) \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+t+1}{t+1} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2-1}{2-t} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sin 2t} \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{\sin 3t} \end{cases}$$

Exercice 6. Étudier la courbe paramétrée suivante et former une équation cartésienne de son support.

$$\begin{cases} x(t) &= & t - t^3 \\ y(t) &= & t^2 - t^4 \end{cases}$$

Exercice 7. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= & 3t^2 \\ y(t) &= & 2t^3 \end{cases}$$

Exercice 8. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R. Soit A un point de $\mathcal{C}$ fixé. Pour P un autre point de $\mathcal{C}$, on appelle M le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (ΩP) en Ω et de (AP). Quel est le lieu de M quand P parcourt $\mathcal{C}$ privé de A ?
On prendra comme repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ de telle façon que Ω ait pour coordonnées $(-R, 0)$

Exercice 9. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit A un point de $\mathcal{C}$ fixé. Quand M décrit $\mathcal{C}$ quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM ?
On prendra comme repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de telle façon que A ait pour coordonnées $(R, 0)$

Exercice 10. Soit $t \to f(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée régulière telle que en tout point de son support de paramètre t la tangente ait pour équation $(t^3+3t)x-2y = t^3$. Donnez un paramétrage en coordonnées cartésiennes de la courbe paramétrée f et étudiez-la.

Exercice 11. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, étudier la courbe paramétrée définie par l'équation polaire : $r(\theta) = e^{\lambda\theta}$. Montrer aussi que l'angle entre $\overrightarrow{OM}(\theta)$ et la tangente au support en $M(\theta)$ ne dépend pas de θ.

Exercice 12. Étudier les courbes paramétrées définies par les équations polaires suivantes :

$$1.\ \ r(\theta) = \cos(3\theta) - 1 \quad 2.\ \ r(\theta) = 1 + 2\cos 2\theta$$

$$3.\ \ r(\theta) = \sin 2\theta + \sin\theta \quad 4.\ \ r(\theta) = \sin\frac{\theta}{3} \quad 5.\ \ r(\theta) = \frac{\tan\theta}{1-\sin\theta}$$

$$6.\ \ r(\theta) = \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} \quad 7.\ \ r(\theta) = \frac{1}{e^\theta - 1}$$

Exercice 13.

1) Étudier la courbe paramétrée d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$.

2) On note $F = (0, -1)$ et P un point de l'axe (Ox) autre que O. Montrer que les points M intersection du support de la courbe étudiée en 1) et de la droite (FP) vérifient : $PM = PO$.

3) En déduire un procédé de contruction à la règle et au compas de la courbe étudiée.