

## Chapitre 6 : Géométrie élémentaire de l'espace : Exercices

**Exercice 1.** Soit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non coplanaires. On note

$$\vec{a}' = \vec{b} \wedge \vec{c}, \quad \vec{b}' = \vec{c} \wedge \vec{a}, \quad \vec{c}' = \vec{a} \wedge \vec{b}, \quad \vec{v} = \|\vec{a}\|\vec{a}' + \|\vec{b}\|\vec{b}' + \|\vec{c}\|\vec{c}'.$$

Montrer que  $\vec{v}$  fait, avec  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , des angles égaux.

**Exercice 2.** Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  dans  $\mathbb{R}^3$  tels que  $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$  et  $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{0}$ . Trouver les couples de vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^3$  qui vérifient les quatre équations :

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \wedge \vec{y}, \quad \vec{a} \wedge \vec{y} = \vec{b} \wedge \vec{x}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{y}, \quad \vec{a} \cdot \vec{y} = \vec{b} \cdot \vec{x}$$

**Exercice 3.** Calculer le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs  $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{w} = (2, 0, 3)$ .

**Exercice 4.**

- 1) Former une équation cartésienne du plan  $P$  passant par  $A = (1, -1, 2)$  et dirigé par  $\vec{u} = (2, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .
- 2) Former une équation cartésienne du plan  $P$  passant par les trois points  $A = (-1, 1, 1)$ ,  $B = (1, -1, 1)$ ,  $C = (1, 1, -1)$ .
- 3) Former une équation cartésienne du plan  $P$  passant par  $A = (1, 1, 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = (2, -1, -1)$ .

**Exercice 5.**

- 1) Trouver une famille de deux vecteurs directeurs du plan  $P$  d'équation cartésienne :  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .
- 2) Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique, de la droite  $D$  dont un système d'équations cartésiennes est :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

**Exercice 6.** Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux deux droites

$$D : \begin{cases} 4x + 3y - z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 4 \end{cases} \quad D' : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

**Exercice 7.** Montrer que les deux droites suivantes sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.

$$D : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad D' : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

**Exercice 8.** Soit  $a$  un réel. On considère les deux droites suivantes :

$$D_a : \begin{cases} x = 2z - a \\ y = 3z + 2a \end{cases} \quad D'_a : \begin{cases} x = -z + a \\ y = z - 2a \end{cases}$$

- 1) Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune  $\Delta_a$  à  $D_a$  et  $D'_a$ .
- 2) Déterminer la réunion, lorsque  $a$  parcourt  $\mathbb{R}$ , des points d'intersection du plan  $z = 0$  et de  $\Delta_a$ .

**Exercice 9.** Soient

$$D : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad D' : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$$

Former des équations cartésiennes de l'unique couple de plans  $(P, P')$  tels que :

$$D \subset P, \quad D' \subset P', \quad P // P'$$

**Exercice 10.** Déterminer toutes les droites  $D$  de l'espace rencontrant les droites

$$D_1 : \begin{cases} z = -1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad D_2 : \begin{cases} z = 0 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad D_3 : \begin{cases} z = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

et parallèles au plan  $P$  d'équation  $x + y - z + 2 = 0$ .

**Exercice 11.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de  $A = (1, 1, 4)$  sur le plan  $P$  d'équation cartésienne  $x - y + 2z = 2$ , puis calculer la  $d(A, P)$ .

**Exercice 12.** Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $D$  dans les deux cas suivants :

- 1)  $A = (4, -3, 2)$  et  $D$  passe par  $B = (1, 0, -1)$  et dirigée par  $\vec{v} = (2, -1, 3)$ .
- 2)  $A = (2, -1, 1)$  et  $D$  est définie par le système d'équations cartésiennes suivant :

$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$$

**Exercice 13.** Calculer la distance de  $D$  à  $D'$  où :

$$D : \begin{cases} x = 2z + 6 \\ y = 3z - 4 \end{cases} \quad D' : \begin{cases} x = -3z + 1 \\ y = z - 4 \end{cases}$$

**Exercice 14.**

Soient  $S$  la sphère décrite par l'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$  et  $D$  la droite passant par  $O$  et dirigée par  $\vec{k}$ .

1. Déterminer les points d'intersection de  $S$  et  $D$  et une équation cartésienne du plan tangent à  $S$  en chacun de ces points.
2. Déterminer l'intersection de  $S$  avec le plan  $P$  d'équation  $y - z + 1 = 0$ .

**Exercice 15.** Former une équation cartésienne de la sphère  $S$  circonscrite au tétraèdre  $ABCD$  où  $A = (0, 2, 4)$ ,  $B = (1, 3, 2)$ ,  $C = (2, 1, 3)$ ,  $D = (-2, -3, -1)$ .