Chapitre 4 : Notion d'application : Exercices

Exercice 1.

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit la *différence symétrique de A et B*, notée $A\Delta B$, par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Pour toute partie A de E on appelle *fonction caractéristique* de A et on note χ_A l'application de E dans $\{0,1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \in A^c$. Montrer qu'on a les formules suivantes, pour toutes A et B parties de E :

$$\begin{aligned}
A = B &\iff \chi_A = \chi_B && (1)\\
\chi_A^2 &= \chi_A && (2)\\
\chi_{A^c} &= 1 - \chi_A && (3)\\
\chi_{A\cap B} &= \chi_A\ \chi_B && (4)\\
\chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_A\ \chi_B && (5)\\
\chi_{A\Delta B} &= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\ \chi_B && (6)
\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2+4x+1 \end{array}\right.$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2,+\infty[$ sur son image (qu'on précisera) et déterminer la réciproque associée.
2. Déterminer les images directes et réciproques suivantes : $f([-3,0])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0,1[)$.

Exercice 3.

Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin\dfrac{\pi}{x} \end{array}\right.$ Déterminer $f(]0,1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à un couple (x,y) associe $(x, xy-y^3)$. f est-elle surjective ? est-elle injective ?

Exercice 5.

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $2k$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $\dfrac{k}{2}$ si k est pair et $\dfrac{k-1}{2}$ si k est impair.

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6.

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 7.

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1) si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2) si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 8. *Une caractérisation des injections*

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F.
1) Soient A et B deux parties de E.
1.a) Montrer que si f est injective alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
1.b) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir à la fois l'égalité précédente et f non injective.
2) Démontrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) $f : E \to F$ est une injection.
(ii) Pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 9. *Une caractérisation des surjections*

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. Démontrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) $f : E \to F$ est une surjection.
(ii) Pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 10.

Pour tout ensemble E, montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E). On pourra raisonner par l'absurde et chercher une contradiction en introduisant l'ensemble $A = \{a \in E \ ; \ a \notin f(a)\}$.