Chapitre 3 : Géométrie élémentaire du plan : Exercices

Exercice 1. On considère dans un certain repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point Ω de coordonnées $(0, 1)$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.
2. Soit A le point de coordonnées $(2, 0)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer ses coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
4. Déterminer une équation cartésienne dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2. Calculer la distance de la droite $\mathcal{D}$ au point A dans les cas suivants :

1. $A = (0, 0)$ et $\mathcal{D}$ passe par $B = (5, 3)$ et est dirigée par $\vec{u} = (1, 2)$.
2. $A = (1, -1)$ et $\mathcal{D}$ passe par $C = (-1, 1)$ et est orthogonale à $\vec{n} = (2, 3)$.
3. $A = (4, -1)$ et $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.

Exercice 3. Former les équations cartésiennes des bissectrices des deux droites :

$$\mathcal{D}_1 : 3x + 4y + 3 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : 12x - 5y + 4 = 0.$$

Exercice 4. Reconnaître les courbes d'équation polaire :

$$r = \frac{1}{\cos\theta + 3\sin\theta},$$

$$r = 3\cos\theta - 4\sin\theta.$$

Exercice 5. Montrer en utilisant la notion de produit scalaire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6. Soient les deux vecteurs $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, -1)$. Calculer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ en l'exprimant à l'aide d'une fonction circulaire réciproque.

Exercice 7. Soient les trois points $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ et $C = (3, 0)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8. Soient les trois points $A = (-3, -1)$, $B = (4, 1)$, $C = (-2, 3)$ et le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$.

1. Former une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.
2. Former une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par C et dirigée par $\vec{u}$.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 9. Former une équation normale de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A = (3, -1)$ et $B = (4, 1)$.

Exercice 10. Soient ABC un triangle équilatéral, M un point à l'intérieur de ABC, A', B', C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$ et h la hauteur de ABC. Montrer que
$$MA' + MB' + MC' = h.$$

Exercice 11. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation cartésienne :
$$x^2 + y^2 + 4x - 3y + 6 = 0$$

Exercice 12. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ et de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 2 = 0$.

Exercice 13. Soit ABC un triangle. Quand un point M décrit le segment $[AB]$ et un point N décrit le segment $[AC]$, quel est le lieu parcouru par le milieu de $[MN]$?

Exercice 14. (*Théorème de Ménélaüs*) Une droite Δ coupe les côtés $(BC), (CA), (AB)$ d'un triangle ABC en trois points notés respectivement A', B', C' distincts des sommets. Établir la relation suivante :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1,$$
en introduisant B'' le projeté de B sur (AC) parallèlement à Δ.

Exercice 15. Soient A, B, C, A', B', C' six points du plan. On note G et G' les isobarycentres respectifs des familles (A, B, C) et (A', B', C').

1. Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
2. Montrer que G et G' sont confondus si et seulement s'il existe un point M tel que les quadrilatères $BA'CM$ et $B'AC'M$ soient des parallélogrammes.

Exercice 16. Soient A, B deux points distincts et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}. \vec{u} = \overrightarrow{BM}. \vec{v}$

Exercice 17. Soient A, B deux points du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient :
$$\vec{u}\,.\overrightarrow{AM} + \vec{u}\,.\overrightarrow{BM} = 0.$$
Même question avec la relation : $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + \det(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = 0$.

Exercice 18. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ dix points du plan deux à deux distincts et situés dans un carré de côté de longueur $a > 0$. Montrer qu'il existe un couple $(i, j) \in \{1, \ldots, 10\}^2$ tel que :
$$0 < M_iM_j \leq \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 19. Soit ABC un triangle non aplati. On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et les angles $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1. Montrer que : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.
2. Montrer le **théorème d'Al Kashi** : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$