Chapitre 23 : Déterminants et systèmes linéaires : Exercices

Exercice 1.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et M la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & 3 \\ 2m & 2 & 1-m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M en utilisant la règle de Sarrus puis au moyen d'opérations élémentaires.
2. A quelle condition sur m la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 2.

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le **déterminant de Vandermonde** :

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

A quelle condition ce déterminant est-il non nul ?

Exercice 3.

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Exprimer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 4.

Soit $x \in \mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants qui sont de taille $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$ (on pourra introduire des relations de récurrence) :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 5.

1. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\det(J) \neq 0$.
   (b) Calculer MJ et en déduire $\det(M)$.
2. Généralisation : soient $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \cdots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \cdots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Calculer $\det(M)$. Un tel déterminant s'appelle un déterminant *circulant*.

Exercice 6.

Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Caculer ${}^tAA$ puis en déduire $|\det(A)|$.
2. Montrer que la fonction $x \to \det(A)$ est polynomiale unitaire de degré 4.
3. En déduire $\det(A)$.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de A. Ce résultat est-il conservé si $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$?

Exercice 7.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme f de E tel que $f^2 = -Id_E$.
2. Et si la dimension de E est paire ?

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -10 & -6 & 12 \\ 4 & 7 & -8 \\ -7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. On appelle *valeur propre de* f tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant.
2. Si λ est une valeur propre de f, on appelle *sous-espace propre de* f *associé à* λ le noyau de $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les sous-espaces propres de f.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la plus "simple" possible.

Exercice 9. Résoudre le système $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ \overline{a}x + y + az = 0 \\ \overline{a}^2 x + \overline{a}y + z = 0 \end{cases}$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 10.

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ deux à deux distincts. Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$