Chapitre 22 : Fonctions convexes : Exercices

Exercice 1.

Soient $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}$
2. Soient $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(y_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de réels strictement positifs. En utilisant :
$$S_x = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}},\ S_y = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}},\ X_k = \frac{x_k}{S_x},\ Y_k = \frac{y_k}{S_y}$$
montrer l'**inégalité de Hölder** :
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Exercice 2.

Soit I un intervalle ouvert.

1. (a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue sur I et dérivable à gauche et à droite en tout point de I.
   (b) Si I n'est pas ouvert, ces résultats sont-ils conservés ?
2. Soit f une fonction convexe bijective de I sur un intervalle J.
   (a) Montrer que f est strictement monotone sur I.
   (b) En déduire que f^{-1} est convexe ou concave sur J.

Exercice 3.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. A-t-on le même résultat si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe. on note ℓ cette limite.
2. On suppose ici que ℓ est réelle et on note $g : x \to f(x) - \ell x$.
   (a) Montrer que g est convexe.
   (b) En déduire que g est décroissante.
   (c) En déduire enfin que g admet une limite en $+\infty$.
3. Interpréter ces résultats géométriquement.

Exercice 5.

1. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln\ln x \end{array} \right.$ est concave sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

Exercice 6.

1. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln(1+e^x) \end{array} \right.$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

3. En déduire que pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 7.

Soit f l'application définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\end{array} \right.$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$.
2. Etudier la convexité de f sur $[0,1[$.
3. Montrer que f possède un point d'inflexion et préciser la tangente de f en ce point.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.