Chapitre 21 : Matrices : Exercices

Exercice 1.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer JMJ.

Exercice 2.

Déterminer l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ \forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ MN = NM\}$.

Exercice 3.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C(A)$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ AM = MA\}$ appelé le *commutant* de A. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer une base de $C(A)$.

Exercice 4.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace de* A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que pour toutes matrices, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \to & \big(X \to \mathrm{Tr}(AX)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Exercice 5.

Ecrire les matrices des applications linéaires dans les bases précisées.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to & (x + y, x - y, 2x) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques, puis dans les bases $\big((1, 1), (1, 0)\big)$, $\big((0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\big)$.
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \to & (x + y + 2z - t, x - y - z + 2t) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \to & \big(P(1), P'(1) + P''(0)\big) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \to & {}^tA \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.

Exercice 6.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier l'existence d'un plus grand entier naturel non nul d pour lequel $\big(I_n, M, M^2, \ldots, M^{d-1}\big)$ est libre.
2. En déduire l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d tel que $P(M) = 0$.
3. En se rappelant le théorème de D'Alembert, en déduire l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lequel la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
4. En déduire enfin qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

Exercice 7.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im} f$.

Exercice 8.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 9.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. En étudiant $\sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k$, montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 10.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. En déduire qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = u_n I_3 + v_n M$$

   On exprimera u_n, v_n puis M^n explicitement en fonction de n.

Exercice 11.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leur inverse.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 12.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 13.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z,t) = (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t)$.

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $\mathcal{B} = \big((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1)\big)$ et $\mathcal{D} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ des familles dont on admettra qu'elles sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Déterminer les matrices de passage des bases canoniques à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.
3. Calculer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 14.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit la famille $\mathcal{B}' = \big((1,1,1),(2,-1,-1),(-1,2,-1)\big)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 15.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}^3$.
2. On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$, $e_3 = (0,1,1)$. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer sans calcul la matrice D de A dans (e_1,e_2,e_3).
4. Calculer D^n, puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\big)$. Après avoir montré que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice D de f dans cette base.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la matrice de f^n dans la base canonique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 11 & -2 & 16 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3$$