Chapitre 20 : Calcul Intégral : Exercices
Première partie

Exercice 1.

Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln t)^2} \mathrm{d}t.$

Exercice 2.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et non nulle telle que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 \quad \text{où } f^2 = f \times f.$$

Montrer que $f = 1$.

Exercice 3.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f| \Longleftrightarrow (f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0).$$

Exercice 4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $f \geq 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer que f est nulle sauf en un nombre fini de points.

Exercice 5.

Soient $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$, avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que l'équation :

$$\int_0^x f = 2x - 1$$

d'inconnue $x \in [0,1]$, admet une unique solution.

Exercice 7.

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f$$

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable :

$$1)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \qquad 2)\ \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \qquad 3)\ \int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y+y(\ln y)^2}$$

$$4)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1} \qquad 5)\ \int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 9.

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{\sqrt{n^2+x^3}}\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 10.

Calculer les intégrales suivantes grâce à une intégration par parties :

$$1)\ \int_0^1 \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t \qquad 2)\ \int_1^e x^n \ln x\ \mathrm{d}x \qquad 3)\ \int_0^{1/2} \arcsin t\ \mathrm{d}t \qquad 4)\ \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t))\ \mathrm{d}t$$

Exercice 11.

Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_1^x e^t \ln t\ \mathrm{d}t}{e^x \ln x} = 1$$

Exercice 12.

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à une "bonne" fonction, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

Exercice 13.

Calculer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$