Chapitre 1 : Fonctions usuelles : Exercices

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{25}{4}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $3^{2x} - 34 \times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$
2) $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x > 0$
3) $x^x = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$, $x > 0$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 8^x & = & 10y \\ 2^x & = & 5y \end{array} \right.$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^y & = & y^x \\ x^3 & = & y^2 \end{array} \right.$$

Exercice 5. Lequel des réels e^π et π^e est le plus grand ?

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1.$$

Exercice 7. Formulaire de trigonométrie circulaire

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Dans la suite on supposera connues les propriétés des nombres complexes et les règles de calcul sur les exponentielles imaginaires pures qui étendent celles sur les exponentielles réelles.

1) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En exprimant de deux façons $e^{ia}e^{ib}$, donner les expressions de $\cos(a+b), \sin(a+b), \cos(a-b), \sin(a-b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a, \sin b$. En déduire quand cela est possible $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.
3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos 2a$ et $\sin 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, quand cela est défini, $t = \tan(\frac{x}{2})$. Exprimer $\cos x, \sin x, \tan x$ seulement en fonction de t.
5) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, exprimer la somme $\cos p + \cos q$ comme un produit de cosinus et/ou de sinus. Même question pour $\cos p - \cos q, \sin p + \sin q, \sin p - \sin q$.
6) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, exprimer le produit $\cos a \cos b$ comme une somme de cosinus et/ou de sinus. Même question pour $\sin a \sin b$ et $\cos a \sin b$.

Vous devez savoir retrouver ces formules très rapidement et en connaître par coeur un maximum

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) \leq 1.$$

Exercice 9. Soient a et b des réels et n un entier naturel, calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \ , \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb).$$

Exercice 10. Soient a et b des réels et n un entier naturel, calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)\ ,\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb).$$

Exercice 11. Formulaire de trigonométrie inverse

1) Démontrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) L'application arccos est-elle paire ? Sinon déterminer une relation, valable pour tout $x \in [-1,1]$, entre $\arccos(-x)$ et $\arccos(x)$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x)$, où $\mathrm{sgn}(x)$ vaut -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$, et $+1$ si $x > 0$.

Ce formulaire est à connaître !

Exercice 12. En étudiant, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_a : x \to \arctan \dfrac{a+x}{1-ax}$, montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} & \text{si} \quad ab < 1 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{sgn}(a) & \text{si} \quad ab = 1 \\[2ex] \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi\ \mathrm{sgn}(a) & \text{si} \quad ab > 1. \end{cases}$$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\arccos x = \arcsin \dfrac{1}{3} + \arccos \dfrac{1}{4}$.

2) $\arcsin(\tan x) = x$.

3) $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathrm{ch}(2x)$, $\mathrm{sh}(2x)$, ainsi que $\mathrm{ch}(3x)$, $\mathrm{sh}(3x)$.

Exercice 15. Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}x + \cos a = 2\ \mathrm{sh}x + \sin a.$$

Exercice 16. Résoudre le système d'équations d'inconnues $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y &= \dfrac{35}{12} \\[2ex] \mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y &= \dfrac{25}{12} \end{cases}$$

Exercice 17. Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{argth}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 18.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour les courbes d'équations $y = \mathrm{sh}x$ et $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.