Chapitre 18 : Développements limités : Exercices

Exercice 1.

Calculer les développements limités suivants dont on indique dans l'ordre, le point au voisinage duquel on le veut, l'ordre de ce DL et enfin la fonction :

1. $0, 5, \quad x \to (1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^{-1}$
2. $0, 4, \quad x \to \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$
3. $0, 3, \quad x \to \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\arcsin x)^2}$
4. $0, 11, \quad x \to ((\mathrm{ch}x - \cos x)(\mathrm{sh}x - \sin x))^2$
5. $0, 3, \quad x \to \ln\left(1+\dfrac{x^2}{1+x}\right)$
6. $0, 3, \quad x \to (1+x)^{1/x}$
7. $0, 5, \quad x \to e^{\cos x}\left(1+e^{-1/x^2}\right)$
8. $0, 3, \quad x \to \arctan(e^x)$
9. $\dfrac{\pi}{3}, 3, \quad x \to \arctan(2\sin x)$
10. $2\pi, 3, \quad x \to \cos\sqrt{x^2+5\pi^2}$

Exercice 2.

Soit la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3.

Montrer que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & xe^{x^2} \end{array}$ admet une réciproque et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 5 de f^{-1}.

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\ln(1+x)}{(e^x-1)\sin x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\ln \mathrm{ch}x - \ln\cos x)^2}{\sqrt{\mathrm{ch}x}+\sqrt{\cos x}-2}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{1/x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, il existe un unique réel strictement positif, noté x_n, qui vérifie : $x_n^n = x_n + n$.
2. Montrer que (x_n) tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer la partie principale de $x_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \dfrac{x^2-8x+2}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

1. Dresser son tableau de variations.
2. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3. En déduire l'équation de sa tangente en 0 et la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
3. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on déterminera l'équation. Quelle est la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$?
4. Etudier le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

Exercice 7.

Soit l'application $f : x \to \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) e^{\frac{1}{x}}$. Déterminer le comportement asymptotique de f quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 8.

1. Montrer que la courbe paramétrée $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & (t+1)e^t \\ y & = & t^2e^t \end{array}\right.$ admet un unique point singulier et donner son allure au voisinage de ce point.
2. Même question avec les courbes $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{4t-3}{t^2+1} \\ y & = & \dfrac{2t-1}{t^2+2} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t^3+t^4 \\ y & = & t^5+t^7 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t^2+t^4 \\ y & = & t^2+t^5 \end{array}\right.$
3. Faites l'étude complète des courbes paramétrées $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\cos t+\cos 2t \\ y & = & 2\sin t-\sin 2t \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y & = & \dfrac{2t-1}{t^2} \end{array}\right.$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{t}+\ln(2+t) \\ y & = & t+\dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$