Chapitre 17 : Introduction à l'algèbre linéaire : Exercices

Exercice 1.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \ ; \ x = y\}$ 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x - 5y - 1 = 0\}$ 3) $\{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$

4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$ 5) $\{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ \deg(P) \geq 2\}$ 6) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f(0) + f(1) = f'(0)\}$

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-ev de E.

1. Montrer : $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Montrer : $(G \subset F$ ou $H \subset F) \Longrightarrow (F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + H)$.
3. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité dans l'inclusion du 1.

Exercice 3.

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$, et $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg L_i = n \\ \forall j \in [\![0, n]\!], \ j \neq i \Longrightarrow L_i(x_j) = 0 \\ L_i(x_i) = 1 \end{cases}$$

Les polynômes $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ sont appelés les **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (b) En déduire que, pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall i \in [\![0, n]\!], \ P(x_i) = b_i \end{cases}$$

2. On fixe désormais $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts. Soient $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \ ; \ \forall i \in [\![0, n]\!] \ f(a_i) = 0\}$ et G est l'ensemble des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Montrer que F et G sont deux sous-ev de E et qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice 4. Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \to ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + z, 2y - 3z, x + 3y - 4z)$. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 6.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout V sous-ev de E et W sous-ev de F, montrer que :

1) $f^{-1}\big(f(V)\big) = V + \mathrm{Ker}\,(f)$.

2) $f\big(f^{-1}(W)\big) = W \cap \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe $P - XP'$. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.

Soit $g : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P - P'$. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 9.

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ qui à une fonction f associe sa dérivée f' et enfin $\psi : E \to E$ définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \big(\psi(f)\big)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que φ et ψ sont linéaires.
2. Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.
3. Etudier l'injectivité, la sujectivité et la bijectivité de ψ et φ.

Exercice 10.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ & (x, y) & \longrightarrow & (x + g(y), y) \end{array}$$

Montrer que φ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 12.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$ et $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$. Montrer que $p = q$.

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 14.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y, z) = (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$. Montrer que u est linéaire et que $\frac{1}{3}u$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les espaces H et H' tels que $\frac{1}{3}u$ soit la symétrie par rapport à H et parallèlement à H'. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.