Chapitre 16 : Polynômes : Exercices

Exercice 1.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a + b \neq 0$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X + a) + P(X + b) = 2P(X)$$

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

1. $X(X + 1)P'' + (X + 2)P' - P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(2X) = P'(X)P''(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$, et calculer P_n.

Exercice 5.

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les anneaux précisés :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$, dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $A = iX^3 - X^2 + (1 - i)$, $B = (1 + i)X^2 - iX + 3$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6.

Trouver tous les $a \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7.

On fixe $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Quel est le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$, dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 8.

Soient $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et r le reste de la division euclidienne de k par n. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ est X^r.

Exercice 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = X^5 + 1$,

$$P_n = (X^4 - 1)(X^3 - X^2 + X - 1)^n + (X + 1)X^{4n-1}.$$

Montrer que A divise P_n dans $\mathbb{C}[X]$. Qu'en est-il dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 10.

Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ xy + yz + zx & = & 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 9 \end{array} \right.$$

Exercice 11.

On considère le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + 1$.

1. Calculer la somme des carrés des zéros de P dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire que les zéros de P ne sont pas tous réels.

Exercice 12.

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P'(0) = 0,\ P'(1) = 1$$

Exercice 13.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*, (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est un zéro double de $P^2 + \lambda Q^2$, montrer que $PQ' - P'Q$ s'annule en a.

Exercice 14.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Former la décomposition en produit de polynômes irreductibles de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Exercice 15.

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ | a_k |< M$. Soit $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$. Montrer que P n'a aucun zéro dans le disque ouvert de centre O et de rayon $\dfrac{1}{1+M}$.