Chapitre 15 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: Exercices

Exercice 1.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $ad + bc \neq 0$. On suppose que $ad + bc$ divise a, b, c et d. Montrer que $ad + bc \in \{-1, 1\}$.

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes dans les ensembles indiqués :

$$1)\ xy = 2x + 3y \quad \mathbb{Z}^2 \qquad 2)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \quad (\mathbb{Z}^*)^2$$

$$3) \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - y^3 - z^3 & = & 3xyz \\ x^2 & = & 2(z + y) \end{array} \right. \quad \mathbb{N}^3$$

Exercice 3.

Montrer en utilisant deux méthodes différentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$.

Exercice 4.

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ solution de l'équation de Fermat : $x^3 + y^3 = z^3$. Montrer que l'un des entiers x, y ou z est divisible par 3.

Exercice 5.

Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 6.

Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les $k\mathbb{Z}$ avec $k \in \mathbb{N}$. *Pour un sous-groupe G non nul, on pourra considérer le plus petit élément de $G \cap \mathbb{N}^*$, après avoir montré qu'il existe bien...*

Exercice 7.

Calculer avec l'algorithme d'Euclide le pgcd de 1014 et 585. Quel est leur ppcm ?

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{pgcd}(x, y) & = & 5 \\ \mathrm{ppcm}(x, y) & = & 60 \end{array} \right.$$

Exercice 9.

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x + y)^p \equiv x^p + y^p\ [p]$.

Exercice 10.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax+by = c \quad (\star)$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrez que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $\operatorname{pgcd}(a, b)$.
2. On suppose dans cette question que $\operatorname{pgcd}(a, b)$ divise c.
   (a) En considérant un couple de coefficients de Bézout de (a, b), montrez que $\star$ possède une solution (x_0, y_0).
   (b) En s'appuyant sur (x_0, y_0), résoudre complétement $\star$.
3. Résoudre les deux équations $2x + 5y = 13$ et $7x - 12y = 3$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.