Chapitre 14 : Continuité et dérivabilité : Exercices

Exercice 1.

Etudier, en tout point de $\mathbb{R}$, la continuité de l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2.

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x).$$

Exercice 3.

Trouver un exemple d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f soit discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ et $f \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = \lambda g(x)$.

Exercice 5.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in I,\ (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 6.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ srtictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \varphi$.
2. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) + x = 0$?

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à t associe t^3 si $t < 0$ et 0 sinon. Montrer que φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $(f,g) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad g(x) \geq 0 \\ f(x) + (g(x))^3 & \text{si} \quad g(x) < 0 \end{cases}$$

Montrer que h est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(n,k,\ell) \in \mathbb{N}^3$ tels que $0 \leq \ell \leq k$ et $0 \leq \ell \leq n$ et enfin $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(\ell)}$ admet au moins $(k-\ell)$ zéros dans I.

Exercice 10.

Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

Exercice 11.

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que f' admette une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, bornée et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f'' soit positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + \sin x$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et f' sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer l'image de $[0,+\infty[$ par f. On note J cette image.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
4. Calculer $f^{-1}(\pi^2)$ et $(f^{-1})'(\pi^2)$.

Exercice 14.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$ et qu'on a $\alpha \in]0,1[$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $(x^3+x^2+1)e^{-x}$.