Chapitre 13 : Ensembles finis et dénombrements : Exercices

Exercice 1.

Calculez les sommes suivantes :

$$1)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\quad (n>0)\qquad 2)\ \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}\quad (n>0)$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\ \text{ et }\ \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k+1}$$

$$4)\ \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p-k}\binom{n}{p+k}\quad (n\geq 2p>0)$$

Exercice 2.

Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ on pose $S_p(n)=\sum\limits_{k=0}^{n}k^p$.

1. Montrer que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ on a
$$S_{p+1}(n+1)=\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}S_k(n).$$
2. En déduire que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ on a
$$(n+1)^{p+1}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}S_k(n).$$
3. Trouver les valeurs **A SAVOIR** des sommes
$$\sum_{k=1}^{n}k,\ \sum_{k=1}^{n}k^2,\ \sum_{k=1}^{n}k^3.$$

Exercice 3.

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{card}E=n$ et $\operatorname{card}F=p$ avec $n\leq p$. Combien y-at-il d'applications strictement croissantes de E dans F ?

Exercice 4.

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

1. Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p>n$.
2. On suppose $p\leqslant n$ et on considère a un élément de E.
   On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E\setminus\{a\}$ sur F, établir $S_n^p=p(S_{n-1}^{p-1}+S_{n-1}^p)$.
3. En déduire que $S_n^p=\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

Exercice 5.

Soient E et F deux ensembles et une application $f : E \to F$.

1. Soit A une partie finie de E, montrer que $f(A)$ est finie et que $\operatorname{card} f(A) \leq \operatorname{card} A$.
2. Soit B une partie finie de F. A-t-on $f^{-1}(B)$ finie ? Examiner le cas où f est injective.

Exercice 6. Formule du crible

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in P_k^n} \operatorname{card}\Big(\bigcap_{i \in I} E_i\Big),$$

où P_k^n est l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 7.

Soit un entier $n \geq 4$. On se donne, dans le plan, n droites distinctes en position générale (i.e. deux droites quelconques ne sont pas parallèles et trois droites quelconques ne sont pas concourantes).

1. En combien de points ces droites se coupent-elles ?
2. Combien de nouvelles droites sont définies par ces points d'intersection ?