# Chapitre 12 : Limites et comparaison de fonctions : Exercices

**Exercice 1.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$. Montrer que $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + \ell'$ et que $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \ell\ell'$.

**Exercice 2.**

Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$1)\ \lim_{x \to 0^+} x^x \qquad 2)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} \qquad 3)\ \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} \qquad 4)\ \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$$

$$5)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cos e^x}{x^2+1} \qquad 6)\ \lim_{x \to +\infty} e^{x - \sin x} \qquad 7)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \arctan x}{x}$$

$$8)\ \lim_{x \to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right) \qquad 9)\ \lim_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) \qquad 10)\ \lim_{x \to 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Exercice 3.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = x - 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 2x + 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La fonction $f$ a-t-elle une limite en $0$ ? en $-2$ ?

**Exercice 4.**

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $e^x - x > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x - \frac{x^n}{n!} > 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^n}{e^x}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5.**

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

**Exercice 6.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique possédant une limite en $+\infty$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 7.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On suppose que $g$ est croissante, montrer que $f$ est constante.

**Exercice 8.**

1. Soient $f$ et $g$ des fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Montrer l'équivalence suivante :
$$e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim_a (f-g) = 0.$$

2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ peut-on en déduire $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ ?

**Exercice 9.**

1. Soient $f$ et $g$ des fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que $g > 0$ au voisinage de $a$ (sauf peut-être en $a$). Montrer que si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g$ admet en $a$ une limite $\ell$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$, alors
$$\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ g.$$

2. A-t-on encore le résultat si $g$ tend vers 1 en $a$ ?
3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

**Exercice 10.** Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{-x}(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x})$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$