Chapitre 11 : Groupes, Anneaux, Corps : Exercices

Exercice 1.

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = x + y + x^2 y$$

1. Vérifier que $*$ n'est pas commutative, n'est pas associative, que $*$ admet un élément neutre et qu'aucun élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'admet d'inverse pour $*$.
2. Résoudre les équations suivantes :

$$2 * x = -3, \quad x * x = 3.$$

Exercice 2.

Soient $(E, *)$ un ensemble muni d'un loi de composition interne associative, $a \in E$, $\perp$ la loi de composition interne dans E définie par : $x \perp y = x * a * y$. Montrer que $\perp$ est associative.

Exercice 3.

Soit $(E, *)$ un magma. Un élément x de E est dit *idempotent* si : $x * x = x$.

1. Montrer que si $*$ est associative et si x et y sont idempotents et commutent, alors $x*y$ est idempotent.
2. Montrer que si $*$ est associative, admet un neutre et si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 4.

On pose, pour tous $(x, y) \in]-1, 1[^2$: $x \vee y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1. Montrer que $(]-1, 1[, \vee)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(]-1, 1[, \vee)$.

Exercice 5.

Soit $(G, .)$ un groupe de neutre e tel que : $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que $(G, .)$ est commutatif.

Exercice 6.

Soient $(G, .)$ un groupe, e son neutre et $(a, b) \in G$ tels que :

$$a^{-1}ba = b^2, \ \text{ et } \ b^{-1}ab = a^2.$$

Montrer que $a = e$ et $b = e$.

Exercice 7.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \to ax + b$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{f_{a,b}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ est un groupe pour la composition $\circ$. Est-il commutatif ?

Exercice 8.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer :

$$H \cup K = G \Longleftrightarrow \big(H = G \ \text{ ou } \ K = G\big).$$

Exercice 9.

Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par : $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$.

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 10.

Soient $(G, *)$, $(G', \bullet)$ deux groupes. On définit la loi produit $\perp$ sur $G \times G'$ par :

$$\forall ((x,x'),(y,y')) \in (G \times G')^2,\ (x,x') \perp (y,y') = (x * y, x' \bullet y').$$

1. Montrer que $(G \times G', \perp)$ est un groupe.
2. Montrer que si H est sous-groupe de G et H' un sous-groupe de G' alors $H \times H'$ est un sous-groupe de $G \times G'$.

Exercice 11.

Soient $(G, *)$, $(G', \bullet)$ deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que, pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
2. Montrer que, pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Exercice 12.

Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 13.

On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau.

Exercice 14.

Soient A un anneau et $(a,b) \in A^2$. On suppose que ab est inversible et que ba n'est pas diviseur de 0. Montrer que a et b sont inversibles.

Exercice 15.

Soit A un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que, si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
2. Montrer que, si x est nilpotent et x et y commutent, alors xy est nilpotent.
3. Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1-x)^{-1}$.

Exercice 16.

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif. Pour $\lambda \in K$ fixé, on définit deux lois, $+_\lambda$, $\times_\lambda$ sur K^2 :

$$\forall (x,y,u,v) \in K^4,\ (x,y) +_\lambda (u,v) = (x+u, y+v),\ \ (x,y) \times_\lambda (u,v) = (xu + \lambda yv, xv + yu).$$

1. Montrer que $(K^2, +_\lambda, \times_\lambda)$ est un anneau commutatif.
2. Dans cette question on prend pour K le corps $\mathbb{Q}$ avec ses lois usuelles. Démontrer que pour que $(K^2, +_\lambda, \times_\lambda)$ soit un corps, il faut et il suffit que λ ne soit le carré d'aucun élément de $\mathbb{Q}$.
3. Dans cette question on prend pour K le corps $\mathbb{R}$ avec ses lois usuelles. Démontrer que pour que $(K^2, +_\lambda, \times_\lambda)$ soit un corps, il faut et il suffit que $\lambda < 0$.