Chapitre 0 : POUR BIEN DÉMARRER l'ANNÉE

Ce chapitre est un peu particulier ; nous allons y revoir et voir des notions élémentaires qui seront utilisées toute l'année.

1 Un peu de logique

Le but ici n'est pas de faire de la logique théorique mais juste de savoir ce que vous écrivez quand vous menez un raisonnement.

1.1 Implication $\Longrightarrow$

La proposition « $p \Longrightarrow q$ » se lit « p implique q ». Elle est toujours vraie quand p est fausse, et elle est aussi vraie, quand p est vraie et q est vraie. Elle est fausse seulement quand p est vraie et q est fausse.

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pour démontrer qu'on a bien l'implication « $p \Longrightarrow q$ », on suppose d'abord que p est vraie. Avec cette hypothèse il faut démontrer d'une façon ou d'une autre que q est vraie.
Pour démontrer que l'implication « $p \Longrightarrow q$ » n'a pas lieu on suppose que p est vraie et il faut démontrer que q est fausse (autrement dit les propositions « non($p \Longrightarrow q$) » et « p et (non q) » sont équivalentes).

Contraposition : les propositions « $p \Longrightarrow q$ » et « (non q) $\Longrightarrow$ (non p) » sont équivalentes c'est-à-dire qu'elles sont vraies ou fausses en même temps. La proposition « (non q) $\Longrightarrow$ (non p) » est appelée la *contraposée* de l'implication « $p \Longrightarrow q$ » .

p	q	non q	non p	non $q \Longrightarrow$ non p
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Exemple : ces deux phrases sont équivalentes :
« S'il pleut, alors il y a des nuages. »$(p \Longrightarrow q)$
« S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas. »$\big((\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)\big)$

Exercice 0.1 :
Que pensez-vous de la validité des propositions suivantes :

– Si $0 = 0$, alors je suis votre professeur de mathématiques.
– Si $0 \neq 0$, alors votre professeur de mathématiques est le pape.
– Si Atchoum est le président de la République, alors il est le chef des armées.

Exercice 0.2 :
Traduisez en terme d'implication les deux phrases suivantes :
– Pour avoir p, il est nécessaire d'avoir q.
– Pour avoir p, il est suffisant d'avoir q.

Exercice 0.3 :
On donne deux théorèmes :
$T1$: Si $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors le triangle (ABC) est rectangle en B.
$T2$: Si (ABC) est rectangle en B, alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Lequel de ces deux théorèmes utilisez vous quand on vous demande si le triangle (ABC) est rectangle en B dans chacun des cas suivants :
1) $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$.
2) $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$.

1.2 Équivalence $\Longleftrightarrow$

La proposition « $p \Longleftrightarrow q$ » se lit « p si et seulement si q » ou encore « p et q sont équivalentes ». Elle est vraie si p et q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses et elle est fausse sinon.

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposition « $p \Longleftrightarrow q$ » est équivalente à « $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$ ». La proposition « $q \Longrightarrow p$ » est appelée la *réciproque* de l'implication « $p \Longrightarrow q$ ».

Pour montrer que l'équivalence « $p \Longleftrightarrow q$ » est vraie on peut utiliser trois méthodes :
1) soit on va de p à q en utilisant un raisonnement dont chaque étape est une équivalence :

$$p \Longleftrightarrow p_1 \Longleftrightarrow p_2 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow p_n \Longleftrightarrow q,$$

2) soit on montre l'implication « $p \Longrightarrow q$ » puis sa réciproque « $q \Longrightarrow p$ »,
3) soit on montre l'implication « $p \Longrightarrow q$ » puis la contraposée de sa réciproque « non $p \Longrightarrow$ non q ».

Exercice 0.4 :
Soit f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-4\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{x^2-1}{x+4} \end{array},$$

déterminer les intervalles où elle est croissante. On utilisera dans la rédaction de la solution des équivalences avec rigueur !

2 Quantificateurs

2.1 Définition

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété qui dépend de x, par exemple E peut être un ensemble de nombres réels et $P(x)$ peut être « $x \geq \pi$ ». On définit alors le quantificateur *universel* « $\forall$ » et le quantificateur *existentiel* « $\exists$ » de la façon suivante :

– La proposition « tous les éléments de E vérifient la propriété P » s'écrit :

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

et se lit : « pour tout élément x de E (ou quelque soit l'élément x de E), x vérifie P ».

– La proposition « l'un (au moins) des éléments de E vérifie P » s'écrit :

$$\exists\ x \in E\ ;\ P(x)$$

et se lit : « il existe un élément x de E tel que x vérifie P ».

Exemple : on a

$$\forall x \in [4, +\infty[,\ x \geq \pi \quad \text{et aussi } \exists\ y \in \{-2, 3, 12\}\ ;\ y \geq \pi.$$

Remarques **IMPORTANTES** :

– On ne mélange pas ces symboles et des phrases en bon français. Soit on écrit une phrase en français avec que du français, soit on écrit une phrase mathématique avec que des symboles mathématiques !
– Pour démontrer un résultat du type : $\forall x \in E,\ P(x)$, on commence par prendre un x quelconque dans E en disant « Soit x dans E ». Ce x est donc fixé une fois pour toutes. Ensuite il faut montrer que ce x vérifie bien la propriété P et c'est fini (en effet le fait de prendre un x quelconque fait que le raisonnement est valable « pour tous les x de E »).
– Pour démontrer un résultat du type : $\exists x \in E\ ;\ P(x)$, il faut exhiber explicitement un x de E qui vérifie bien P.

Exercice 0.5 :
Montrer le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}\ ;\ z > x + y.$$

Exercice 0.6 :
Soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, traduiser avec des quantificateurs les résultats suivant :
1) La fonction f est la fonction nulle.
2) La fonction f s'annule.
3) La fonction f n'est pas nulle.

Exercice 0.7 :
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ traduiser avec des quantificateurs le fait que f soit croissante sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Négation de quantificateurs

La négation de la proposition : « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est la proposition : « $\exists x \in E$; non $P(x)$ ».

Exemple : la négation de : « $\forall x \in [-4, 4], x \geq \pi$ » est : « $\exists x \in [-4, 4]\ ;\ x < \pi$ ». (Bien sûr une seule des deux propositions est vraie !)

La négation de la proposition : « $\exists x \in E\ ;\ P(x)$ » est la proposition : « $\forall x \in E$, non $P(x)$ ».

Exemple : la négation de « il existe un élève de cette classe qui est gaucher » est « tous les élèves de cette classe sont droitiers »(on a supposé qu'il n'y a pas d'élève ambidextre dans cette classe !).

Exercice 0.8 :
Quelle est la négation des propositions suivantes :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \cos(x) > 0. \tag{1}$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[,\ \tan(x) \geq -100. \tag{2}$$

$$\text{Toute fonction continue est dérivable.} \tag{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x\ ;\ y^2 > x^2. \tag{4}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(\mid x \mid < \eta \Longrightarrow \mid x^2 + \sin(x) \mid < \varepsilon\Big) \tag{5}$$

Essayer de donner une signification en français de la proposition (5) et de sa négation.

Exercice 0.9 :
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas croissante sur $\mathbb{R}$, pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 0.10 :

1) Donner la définition d'une application paire, d'une application impaire, d'une application non paire, d'une application non impaire.
2) Toute application est-elle soit paire, soit impaire ?
3) Quelles sont les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires ?
4) Démontrer que toute application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une application paire et d'une application impaire. Peut-on généraliser ce résultat aux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$? Appliquer ce résultat au cas de l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, $x \to e^{ix}$.

2.3 Permutation de $\forall$ et $\exists$

On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ **entre eux** et les quantificateurs existentiels $\exists$ **entre eux** sans changer le sens des propositions où ils interviennent.

Exemples :
- Les propositions « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_-, x \geq y$ » et « $\forall y \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq y$ » sont équivalentes.
- Les propositions « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_-, x \geq y$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}_-, \exists x \in \mathbb{R}_+, x \geq y$ » sont équivalentes.

ATTENTION ! A priori la permutation d'un $\forall$ et d'un $\exists$ change le sens de la proposition.

Exemples :
- Soit la proposition « dans tout igloo d'une famille du Nunavut, il y a un trou pour pêcher » qu'on peut traduire formellement par :

$$\forall i \text{ igloo }\ \exists t \text{ trou }\ ;\ t \text{ est dans } i.$$

  Permutons $\forall$ et $\exists$: $\exists t$ trou ; $\forall i$ igloo, t est dans i. En bon français, cela veut dire qu'il existe un trou qui est commun à tous les igloo ce qui n'est pas du tout la même chose que la proposition de départ. D'ailleurs la proposition de départ peut être vraie alors qu'après permutation elle est clairement fausse !
- Soit la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq y,$$

  qui est vraie (prouvez le proprement). Permutons, on obtient :

$$\exists y \in \mathbb{R}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq y.$$

  Qui est fausse : prouvez-le ! !

3 Le raisonnement par récurrence

Principe de la récurrence (simple) :

Soit $P_0, P_1, P_2, \dots$ une suite infinie de propositions. Si P_0 est vraie (**initialisation**), et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie (**hérédité**), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Remarque : plus généralement, si n_0 est un entier naturel fixé et si P_{n_0} est vraie et que pour tout $n \geq n_0$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie, alors pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie.

IMPORTANT : dans toute rédaction d'un raisonnement par récurrence on doit trouver, clairement identifiées, les trois phases suivantes :
- On énonce ce qu'on veut démontrer par récurrence et par rapport à quel indice on fait cette récurrence.
- Initialisation.
- Hérédité.

Attention : dans la partie Hérédité, je ne veux jamais voir « On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, démontrons P_{n+1} ». On ne peut pas supposer ce qu'on veut démontrer par récurrence !!

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = q^n u_0$.
- Initialisation : comme $q^0 = 1$, on a bien $u_0 = q^0 u_0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé), on suppose qu'on a $u_n = q^n u_0$ (c'est l'hypothèse de récurrence). On a alors $u_{n+1} = qu_n$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q. Puis grâce à l'hypothèse de récurrence on a $u_{n+1} = q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0$; c'est ce qu'on voulait.

On a donc le résultat cherché grâce au principe de récurrence.

Attention : on n'oublie pas l'initialisation sous peine de « démontrer » des résultats faux ! Par exemple, montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = n + 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a $n = n + 1$. Alors $n + 2 = (n + 1) + 1 = n + 1$.
Bien sûr c'est l'initialisation qui est fausse : on n'a pas $0 = 0 + 1$!!

Exercice 0.11 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3^n + 1$.

Parfois l'hypothèse P_n vraie ne suffit pas à montrer que P_{n+1} est vraie. Dans ce cas on utilise le **principe de récurrence forte** :

Soit $P_0, P_1, P_2, \dots$ une suite infinie de propositions. Soit $M \in \mathbb{N}$, Si $P_0, \dots, P_M$ sont vraies (**initialisation**), et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n-M}, \dots, P_n$ vraies implique P_{n+1} vraie (**hérédité**), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exercice 0.12 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (6 \times 2^n) - 7.$$

4 Un peu de théorie des ensembles

On se contentera de la définition intuitive d'un ensemble : c'est une collection d'objets, qui sont ses éléments. L'ensemble vide c'est-à-dire celui qui n'a pas d'élément est noté $\emptyset$.

Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

On notera un ensemble entre accolades de deux façons. Soit l'ensemble n'a qu'un petit nombre d'éléments (notamment un nombre fini) et alors on peut se permettre de tous les écrire : par exemple $\{\pi\}$ ou $\{0, 1, 2\}$. Sinon on définit l'ensemble par une propriété vérifiée par ses éléments et eux seuls : $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \exists k \in \mathbb{N}\ n = 2k\}$ est l'ensemble des entiers pairs. Un même ensemble peut être défini des deux façons, par exemple :

$$\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n^2 = n\}.$$

Un ensemble qui n'a qu'un unique élément est appelé *singleton* et un ensemble qui a exactement deux éléments une *paire*.

4.1 Appartenance et inclusion

Pour tout ensemble E, la relation « x est un élément de E » ou « x appartient à E » est notée « $x \in E$ ». On note $y \notin E$ pour dire que y n'appartient pas à E.

Définition 1
Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on écrit $E = F$ s'ils possèdent exactement les mêmes éléments, i.e. si

$$\forall x,\ (x \in E \Longleftrightarrow x \in F).$$

Définition 2
Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on écrit $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F, i.e. si

$$\forall x \in E,\ x \in F.$$

On dira aussi que E est une partie de F ou encore que F contient E.

Exemple : $N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

ATTENTION à ne pas confondre $\in$ et $\subset$. Par exemple $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \not\subset \mathbb{N}$ par contre on a bien $\{0\} \subset \mathbb{N}$! Et $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{-1, 0, 1\} \notin \mathbb{Z}$.

En pratique : pour démontrer une inclusion $E \subset F$, il faut commencer par : « Soit $x \in E$, montrons que $x \in F$. ».

Exercice 0.13 :
Si on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres pairs, montrez que $\{k(k+1)\ ;\ k \in \mathbb{N}\} \subset 2\mathbb{N}$.

Théorème 1
Soient E et F deux ensembles. E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

En pratique pour démontrer l'égalité $E = F$, il y a deux méthodes :
1) On raisonne par équivalence : $x \in E \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow x \in F$.
2) On se sert du théorème précédent en montrant les deux inclusions. C'est-à-dire on prend un élément de E et on montre qu'il est dans F puis on prend un élément de F et on montre qu'il est dans E.

Exercice 0.14 :
Montrez que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \forall y \in \mathbb{R}_+\ x \leq y\}$.

Définition 3
Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Pour tout ensemble A on a donc

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemples : $\{-1, 0, 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Pour tout ensemble E il faut remarquer que $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 0.15 :
Démontrez les deux appartenances de la dernière phrase.

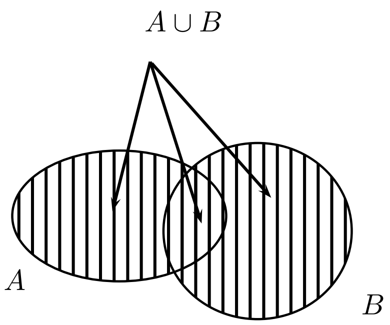
4.2 Opérations sur les ensembles

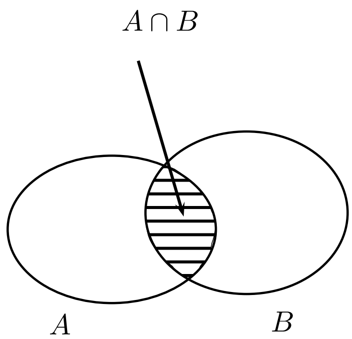
Définition 4
Soit A et B deux ensembles.
On appelle réunion de A et B l'ensemble suivant :

$$A \cup B = \{x \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle intersection de A et B l'ensemble suivant :

$$A \cap B = \{x \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$





On peut généraliser cette définition avec plus de deux ensembles. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'ensembles (i.e. I est un ensemble et pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble). On appelle réunion des A_i, $i \in I$, l'ensemble suivant :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \ ; \ \exists i \in I \ ; \ x \in A_i\}. \quad (x \text{ est dans l'un des } A_i)$$

On appelle intersection des A_i, $i \in I$, l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \ ; \ \forall i \in I, \ x \in A_i\}. \quad (x \text{ est dans tous les } A_i)$$

Remarque : $A\cap B \in \mathcal{P}(A)$ et $A\cap B \in \mathcal{P}(B)$. Par contre on a $A \in \mathcal{P}(A\cup B)$ et $B \in \mathcal{P}(A\cup B)$.

Définition 5
Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

Théorème 2
Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'ensembles et B un ensemble. On a

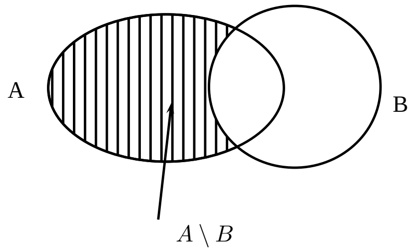
$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B).$$

Démonstration : On ne montre que la première égalité la deuxième se prouve de la même façon (faites le c'est un bon excercice pour savoir si vous comprenez bien la première). Prenons un x, on a

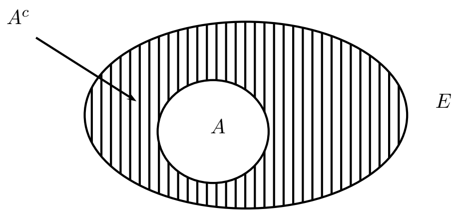
$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ et } x \in B \Longleftrightarrow (\exists i \in I \ ; \ x \in A_i) \text{ et } x \in B \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in I \ ; \ (x \in A_i \text{ et } x \in B) \Longleftrightarrow \exists i \in I \ ; \ x \in A_i \cap B \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \square \end{aligned}$$

Définition 6
Soit A et B deux ensembles. On appelle différence de B dans A, l'ensemble suivant :

$$A \setminus B = \{x \ ; \ x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}.$$



Définition 7
Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble $E \setminus A$ est appelé le complémentaire de A dans E. Il est noté A^c.



Théorème 3
(Relations de Morgan) *Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble de parties d'un même ensemble E. On a*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \textit{et} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Démonstration : prouvons la première égalité la deuxième étant laissée en excercice. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c &\Longleftrightarrow \text{ non } (x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \Longleftrightarrow \text{ non } (\exists i \in I \ ; \ x \in A_i) \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in I, \ x \notin A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, \ x \in A_i^c \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \square \end{aligned}$$

Nous reviendrons plus tard sur les définitions qui suivent. On en donne ici une première version intuitive.

Définition 8
Soient E et I deux ensembles. Une suite d'éléments de E repérés par les éléments de I est appelée une famille d'éléments de E indexée par I.

Une telle famille est notée $(x_i)_{i\in I}$. x_i est l'élément de E repéré par l'indice $i \in I$. Dans le cas où $I = [m, n]$, avec $m \leq n$, (l'ensemble des entiers compris entre m et n les deux inclus) on note plus couramment $(x_i)_{m\leq i\leq n}$ ou $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées par I sont égales si et seulement si : $\forall i \in I, x_i = y_i$. L'élément x_i est appelé **la** *composante d'indice i de la famille $(x_i)_{i\in I}$.*

ATTENTION à ne pas confondre ensemble et famille. Dans un ensemble les éléments sont donnés sans ordre contrairement à une famille. Par exemple l'ensemble $\{1, 4, 9\}$ est exactement le même que l'ensemble $\{4, 9, 1\}$. Par contre $(1, 4, 9) \neq (4, 9, 1)$.

Définition 9
Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles non vides. L'ensembles des familles $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans lesquelles $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ est appelé le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$ et il est noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Dans le cas où $E_1 = E_2 = \dots = E_n$ le produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est noté E^n.

Remarque : dire « $\forall x \in E,\ \forall y \in F, \dots$ » équivaut à dire « $\forall (x, y) \in E \times F, \dots$ ».

Exercice 0.16 :
A, B, C sont des parties d'un ensemble E. Montrer les résultats suivants :
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup E = E$
- $A \cup B = B \iff A \subset B$
- $A \cap B = A \iff A \subset B$
- $A \setminus B = A \cap B^c = A \setminus (A \cap B)$

Exercice 0.17 :
Ecrivez, avec les symboles $\bigcap$ et $\bigcup$, l'ensemble de définition de la fonction tan et l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \sin x$.