Devoir Surveillé 9.

Vendredi 7 mai

La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.
RAPPEL :
- **Résultats pas encadrés = -1 point**
- **A chaque fois qu'on juge votre copie sale : -0,25 point**
- **Pour chaque page qui contient au moins 3 fautes d'orthographe : -0,25 point**

Questions de cours

1. Enoncer et démontrer l'égalité de Taylor reste intégral et l'inégalité de Taylor Lagrange.
2. Enoncer et démontrer le théorème de changement de variable.
3. On considère la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quand est-elle inversible ? Dans ce cas donner son inverse. On démontrera les résultats.
4. Enoncer le théorème de changement de base pour la matrice d'une application linéaire. Il vous faudra donner des notations très précises et faire apparaître le diagramme fait en cours qui permet de retrouver cette formule.

Exercice 1.

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de l'application linéaire suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \rightarrow & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$
2. On considère toujours l'application f de la question précédente. Donner sa matrice représentative dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$ puis dans les bases $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ et $\mathcal{C}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
3. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = 1 \ , \ u_1 = 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$
4. Après l'avoir décomposée en éléments simples, donner une primitive de la fraction rationnelle : $x \rightarrow \dfrac{x^2-2x+5}{x^2-3x+2}$ en précisant son domaine de définition.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)+2\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Problème 1. (*D'après Centrale TSI 2007*)

La question 1 est indépendante du reste : on pourra utiliser ses résultats dans la suite sans l'avoir réussie.

1. On va commencer par démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

   (a) Montrer que l'application $x \to \displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   (b) En faisant une intégration par parties, démontrer (en justifiant très précisemment les détails) que
   $$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$$
   c'est le lemme de Riemann-Lebesgue.

   (c) Expliquer pourquoi on a aussi
   $$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t = 0$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$.

   (a) Prolonger l'application $x \to \dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$ par continuité en 0 et justifier l'existence de J_n. Que vaut J_1 ?

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $J_{n+2} - J_n$.
   On pourra démontrer pour cela que $\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2\sin(x)\cos((n+1)x)$.

   (c) En déduire la valeur de J_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   (d) En utilisant après l'avoir démontrée l'égalité : $\sin((n+1)x) - \sin(nx) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$, montrer que
   $$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$$

   (e) En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_{n+1} - J_n$

   (f) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} J_{2p}$.

   (g) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$

3. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x$.

   (a) Expliquer pourquoi I_n est bien définie. Exprimer $J_n - I_n$ à l'aide de la fonction $\psi : x \to \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

   (b) Montrer que ψ se prolonge de façon $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (*On attend ici une justification minutieuse avec des calculs de développements limités etc ... tout cela sera justement rétribué ! !*)

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$

4. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Problème 2. (*D'après Mines de sup 2005*)

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

Dans tout ce problème on se place dans l'espace à trois dimensions usuel, noté E, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Les différentes coordonnées et équations qui apparaissent dans l'énoncé sont relatives au repère $\mathcal{R}$.

Pour trois réels α, β, δ et trois vecteurs de E, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ fixés, on définit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ définie pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E par

$$f(\overrightarrow{X}) = \alpha\left(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{X} + \delta\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{w}$$

Partie 1 : un peu de géométrie

On note D la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ et D' la droite passant par l'origine O et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. On note aussi Q le plan d'équation $y + z = 0$ et enfin, pour tout réel m, P_m le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}_m$ de P_m ainsi qu'un point et un vecteur directeur de D.
2. Vérifier que tous les plans P_m contiennent la droite D.
3. Calculer $\overrightarrow{r}_m = \overrightarrow{n}_m \wedge \overrightarrow{a}$. En déduire que D' n'est pas orthogonale à P_m. On appelle alors R_m l'unique plan contenant D' et perpendiculaire à P_m. Obtenir une équation cartésienne de R_m.
4. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m le point d'intersection des plans P_m, Q et R_m.
5. On note S l'ensemble de E d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Préciser la nature de S et les éléments géométriques qui le caractérisent.
6. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, I_m appartient à S ainsi qu'à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
7. Déterminer l'ensemble F des points M de E par lesquels passe un unique plan P_m (i.e. pour un seul m). Quelle est la réunion des plans P_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

Partie 2 : un exemple d'application f

Dans cette partie on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 5\overrightarrow{i}$, $\alpha = 3, \beta = -3, \delta = 1$.

8. Vérifier que, pour tout $(x, y, z) \in E$, $f(x, y, z) = (4y + 2z, d, e)$ où on déterminera d et e en fonction de x, y et z.
9. Déterminer une base et la dimension du noyau de f. f est-il un automorphisme de E ?
10. Enoncer le théorème du rang. Déterminer le rang de f.
11. Montrer, dans le cas général que si φ est une application linéaire définie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel G où G est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$, alors l'image de φ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\varphi(\overrightarrow{e}_1), \varphi(\overrightarrow{e}_2), \varphi(\overrightarrow{e}_3)$.
12. Déterminer une base de l'image de f.
13. Montrer que $B' = \left(f(f(\overrightarrow{i})), f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{i}\right)$ est une base de E.
14. Écrire la matrice A' de f dans B'.

15. Sachant que la matrice de passage P de la base B' à la base $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est l'une des deux matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 32 & 32 & -16 \end{pmatrix}$$

préciser, en justifiant, laquelle est P.

16. Donner la relation matricelle reliant $A = \mathrm{Mat}_B(f)$ avec $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f)$.

Partie 3 : un deuxième exemple

Dans cette partie on prend $\beta = \delta = 0$ et on appelle l'application correspondante de l'introduction g au lieu de f, c'est-à-dire :

$$\forall \overrightarrow{X} \in E \ , \ g(\overrightarrow{X}) = \alpha \left(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{u}\right) \overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls fixés de E et où α est un réel non nul.

17. Vérifier que si $\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1$ alors g est un projecteur. Puis démontrer la réciproque : si g est un projecteur, alors $\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1$.

18. On suppose que $\alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1$. On note $F_1 = \left\{\overrightarrow{X} \in E \ ; \ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{X} = 0\right\}$ et $F_2 = \{\lambda \overrightarrow{v} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E. Quelle est la base et la direction de la projection g ?

19. On note $P = \{(x, y, z) \in E \ ; \ x + y + z = 0\}$ et D la droite engendrée par $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 5\overrightarrow{i}$. Déterminer l'expression de la projection sur P parallèlement à D et celle de la projection sur D parallèlement à P.

⋆⋆⋆

Une petite charade à 0,5 point :

1) Mon premier est la moitié d'un côté d'un triangle rectangle.
2) Mon deuxième se conclut généralement après 8 ans d'études.
3) J'espère que vous aurez tous 10 fois cette note à ce DS.
4) Mon quatrième est essentiel à un bon poème.
5) Mon cinquième est le nom que mérite tout élève ne sachant résoudre une équation différentielle.

Résoudre mon tout ferait de vous un grand mathématicien très riche.