Devoir Surveillé 8.

Vendredi 2 avril

Le sujet comporte au total deux exercices indépendants et deux problèmes. Le barème est donné à titre indicatif.
La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.
RAPPEL :
- **Rédiger chaque exercice sur une copie séparée.**
- **Résultats pas encadrés = -1 point**
- **A chaque fois qu'on juge votre copie sale : -0,25 point**
- **Pour chaque page qui contient au moins 3 fautes d'orthographe : -0,25 point**

Questions de cours (3 points)

Faites auparavant...

Exercice 1. (3 points)

Les questions de cet exercice sont totalement indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $g : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2 - 3x + 4}$.
   En déduire que g est dérivable en 1, préciser $g'(1)$ et l'équation de sa tangente en 1 et enfin la position locale de la courbe représentative de g par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{2n+1} + 1$.
   (b) En déduire celle de $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = 1 - X + X^2 - \cdots - X^{2n-1} + X^{2n}$.

Exercice 2. (2 points)

On considère l'arc paramétré Γ donné par :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) &= t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1. Etudier les branches infinies de Γ et préciser la position locale de la courbe par rapport à ses éventuelles asymptotes.
2. Etudier les variations des fonctions x et y et donner leur tableau de variation.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de chacune des fonctions x et y.

4. Déduire de la question précédente la nature du (des) point(s) stationnaire(s) et préciser la tangente en chacun de ces points.
5. Montrer que la courbe ne possède pas de point double.
6. Tracer très sommairement l'allure de la courbe Γ.

Problème 1. (6 points)

On considère les ensembles F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = z\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\} \end{aligned}$$

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base et la dimension de F et G.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $p(x,y,z)$.
5. Soit q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x+y-z, y, y) \end{array}$$

   Montrer que q est un projecteur.
6. Donner une famille génératrice du noyau de q : $\operatorname{Ker} q$.
7. Vérifier que $\operatorname{Ker} q$ et G sont en somme directe.
8. Montrer que $\operatorname{Im} q = F$.
9. En déduire que $p \circ q = q$ et que $q \circ p = p$. (*Il n'est pas nécessaire d'avoir calculé p à la question 4 pour répondre à cette question ni aux suivantes.*)
10. On pose $r = p + q$. Est-ce que r est un projecteur ?
11. Pour tout entier $n \geq 2$ calculer r^n en fonction de r.
12. On note I l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Montrer les deux inclusions :

$$(a) \ \operatorname{Im}(r - 2I) \subset \operatorname{Ker}(r) \qquad\qquad (b) \ \operatorname{Im}(r) \subset \operatorname{Ker}(r - 2I).$$

13. Écrire I comme une combinaison linéaire de r et $r - 2I$.
14. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(r) \oplus \operatorname{Ker}(r - 2I)$.
15. Donner l'expression de la projection vectorielle h sur $\operatorname{Ker}(r)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(r - 2I)$.

Problème 2. (6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(0) = 1$.

Étude de fonction

1. Étude de la régularité de la fonction f.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0. On notera dans la suite encore f ce prolongement.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. Comportement de la fonction f.

   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies ainsi que la position de la courbe représentative de f par rapport à d'éventuelle(s) asymptote(s).

   (b) Dresser le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative en faisant apparaître les éléments déterminés précédemment.

Développements limités

Soit n un entier naturel non nul.

3. Déterminer le développement limité de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ à l'ordre n en 0.

4. En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.

   On notera dans toute la suite $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité. On définit ainsi une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

5. Déterminer le développement limité de f à l'odre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3.

6. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $p \geq 2$,
   $$\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} = 0.$$

   (b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n en fonction de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

   (c) Écrire une procédure `bernoulli(n)` qui prend comme argument un entier naturel `n` et calcule $b_{\mathtt{n}}$.

Étude de polynômes

Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n-ème polynôme de Bernoulli. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

7. Déterminer B_0, B_1, B_2.

8. Montrer les égalités suivantes.

   (a) Pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

   (b) Pour tout $n \geq 1$, $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$.

   (c) Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$.

9. Pour tout $n \geq 0$, posons $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

   (a) Montrer que $Q_0(X) = B_0(X)$.

   (b) Pour tout $n \geq 1$, calculer $Q_n'(X)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $Q_n(X) = B_n(X)$.

   (d) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $b_{2n+1} = 0$.

Question bonus au dos...

1) Sa capitale est Quito
2) Capitale des Philippines
3) Capitale du Pakistan
4) Capitale de l'Angola
5) Rome est sa capitale
6) Capitale de l'Ecosse

7) Capitale du Kenya
8) Capitale du Burkinafaso
9) Le Caire est sa capitale
10) Capitale de la Tunisie
11) Capitale de la Finlande
12) Sa capitale est Madrid
13) Capitale de l'Iceland

Mon tout s'obtient un prenant la première lettre de chaque réponse et est une mathématicienne.