Devoir Surveillé 7. 4h.

Vendredi 12 mars

La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.
RAPPEL :
- **Résultats pas encadrés = -1 point**
- **A chaque fois que je juge votre copie sale : -0,25 point**
- **Pour chaque page qui contient au moins 3 fautes d'orthographe : -0,25 point**

Questions de cours

1. Enoncez la formule de Taylor pour les polynômes.
2. Enoncez et démontrez le théorème de Rolle.
3. Donnez (sans preuve) les différentes caractérisations (dans le cours il y en a 3 équivalentes) de la multiplicité d'une racine d'un polynôme.
4. Donnez l'énoncé et la preuve de l'inégalité des accroissements finis.
5. Donnez l'énoncé de la formule de Leibniz avec ses hypothèses.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y' + y = xe^x$.

Exercice 1

1. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
   On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible (i.e. p et q premiers entre eux).
   Montrer que p divise a_0 et q divise a_n.
2. En déduire la factorisation de $P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que le polynôme $P = X^3 + 3X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui divise P autre que des constantes et des polynômes associés à P).

Exercice 2

Il s'agit de démontrer le théorème de Darboux qui dit ceci : soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ tels que par exemple $f'(a) < f'(b)$.

1. Montrons tout d'abord que f' prend toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$:
   (a) Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par
   $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in]a, b] \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$
   Montrer que φ est continue sur $[a, b]$.

(b) Soit un réel y entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = \varphi(x)$.

(c) Conclure cette question en montrant qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f'(c)$.

2. Montrer de même que f' prend toutes les valeurs entre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(b)$.
3. Conclure.
4. Pourquoi ce théorème serait évident si f était supposée de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3

Rappel : on dit que λ est une racine simple d'un polynôme P si son ordre de multiplicité vaut 1, et que c'est une racine multiple si son ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

Soit le polynôme $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$ où a et b sont, pour l'instant, 2 réels quelconques.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit une racine multiple de P. Désormais a et b auront ces valeurs. Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?
2. Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P (avec a et b trouvés précédemment) par $(X-1)^k$. Préciser la valeur du quotient Q.
3. Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$. (*On pourra essayer de trouver des racines complexes évidentes*)
4. En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la factorisation de $P(X^2)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.
6. Montrer successivement que P', P'' et $P^{(3)}$ possèdent chacun au moins une racine réelle dans l'intervalle $]-3,1[$.

(*Les deux dernières questions n'ont pas de lien entre elles.*)

Exercice 4

On définit la fonction f qui à x associe $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)+1}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est dérivable sur cet ensemble et calculer sa dérivée.

   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

   (c) Ainsi prolongée, f est-elle dérivable en 0 ? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 ?
2. (a) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition. On précisera les limites aux bords de cet ensemble.

   (b) Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative, $\mathcal{C}$, de f.

   (c) Représenter l'allure de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé en y faisant apparaître clairement les renseignements précédents.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = e$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)+1}$.

   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,e]$.

   (b) Trouver la valeur de $M = \sup\limits_{[1,e]} |f'|$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - 1|$.

(d) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

4. (a) Déterminer, en justifiant que c'est possible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $x \to 1 + \ln(x)$.

   (b) En remarquant que $f(x)(1 + \ln(x)) = x$, déterminer une formule exprimant, pour $n \geq 2$, la dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, en fonction des dérivées $f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n-1)}$.

Exercice 5

On fixe p un nombre premier. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $kp + 1$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit q_0 un nombre premier.

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, q_0 - 1]\!]$, q_0 divise $\dbinom{q_0}{k}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^{q_0} \equiv n[q_0]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^{q_0} \equiv n[q_0]$.

   (c) En déduire le petit théorème de Fermat : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n et q_0 sont premiers entre eux (i.e. q_0 ne divise pas n) alors

$$n^{q_0 - 1} \equiv 1[q_0]$$

2. On définit le polynôme suivant : $\phi(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$. Et dans cette question on fixe un nombre premier q distinct de p et on fixe aussi un $x \in \mathbb{Z}$ tels que $\phi(x) \equiv 0[q]$. Enfin on note E l'ensemble suivant :

$$E = \{n \in \mathbb{N}^* \; ; \; x^n \equiv 1[q]\}$$

   (a) Montrer que $p \in E$. Montrer que q et x sont premiers entre eux et en déduire que $q - 1 \in E$.

   (b) Pourquoi E possède-t-il un plus petit élément ? On notera m cet élément.

   (c) Pour tout $n \in E$, montrer que E contient $m \wedge n$ (le pgcd de m et n) en utilisant le théorème de Bézout. En déduire que m divise n.

   (d) Montrer que m est différent de 1.

   (e) En déduire que $m = p$ puis la congruence $q \equiv 1[p]$.

3. On suppose que l'équation $\phi(x) \equiv 0[q]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ possède une solution pour seulement un nombre fini de nombres premiers q. On note alors $q_1, q_2, \ldots, q_r$ la liste de tous ces nombres premiers distincts. Obtenir une contradiction en considérant un diviseur premier de $\phi(q_1 q_2 \ldots q_r)$.

4. Conclure.