Devoir Surveillé 6. 4h.

Vendredi 29 janvier

La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.
RAPPEL :
- **Résultats pas encadrés = -1 point**
- **A chaque fois que je juge votre copie sale : -0,25 point**
- **Pour chaque page qui contient au moins 3 fautes d'orthographe : -0,25 point**

Questions de cours

1. Soient $(G, \star)$ et $(H, \perp)$ deux groupes de neutres respectifs 1_G et 1_H. Donnez la définition d'un morphisme de groupes de G dans H et démontrez que si f est un tel morphisme alors on a
$$f(1_G) = 1_H \quad \text{et } \forall x \in G, \ \ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$
et que $\ker f$ est un sous-groupe de G et $\operatorname{Im} f$ un sous-groupe de H.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Donnez la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ dans les deux cas suivant :
$$1)\ \ a \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R} \qquad\qquad 2)\ \ a = +\infty, \ell = -\infty$$
3. Enoncez la cartérisation séquentielle de la limite d'une fonction en un point.
4. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E ? Démontrez ce résultat.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$
2. Démontrez : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Exercice 2

Déterminez les limites suivantes en justifiant très en détails vos calculs.

$$1)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{\sin x}} \qquad\qquad 2)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$$

$$3)\ \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \qquad\qquad 4)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \ln(1+x))}{x}$$

Exercice 3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre non nul de **cardinal fini**.

1. Rappelez la définition d'un anneau intègre.
2. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. On introduit les deux applications

$$\gamma_a : \left\{ \begin{array}{l} A \to A \\ x \to xa \end{array} \right. \quad \delta_a : \left\{ \begin{array}{l} A \to A \\ x \to ax \end{array} \right.$$

   (a) Montrez que γ_a et δ_a sont injectives.

   (b) Montrez qu'en fait γ_a et δ_a sont bijectives.

   (c) Montrez que a admet un inverse à gauche et un inverse à droite (c'est-à-dire qu'il existe $(b, c) \in A^2$ tels que $ba = 1$ et $ac = 1$).

   (d) Montrez que ces deux inverses à gauche et à droite sont en fait égaux et qu'ainsi a est inversible.
3. On suppose qu'en plus A est commutatif. Que peut-on en conclure sur A ?
4. Donnez un exemple d'un anneau intègre non nul qui n'est pas un corps.

Problème 1.

Dans tout ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, on désigne par $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f, avec $f^{(0)} = f$.

Le but de ce probème est de prouver l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, de déterminer sa valeur, puis de prouver l'irrationnalité de π^2 (et donc de π).

Partie 1 : convergence de la somme et vitesse de convergence

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Etudier les variations de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (S_n) converge.

On souhaite donc établir cette propriété par deux méthodes différentes.

3. Première méthode.

(a) En remarquant que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$ et en écrivant $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$ (avec a et b des réels fixés à déterminer), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

(b) En déduire que (S_n) converge.

(c) Que peut-on déduire de la question (a) par rapport à la limite ℓ de la suite (S_n) ?

4. Seconde méthode.

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant S_{n-1}$$

(c) En calculant explicitement l'intégrale précédente, établir que :

$$\forall n \geqslant 2 \ , \ S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

(d) Retrouver alors les résultats de la question 3.

5. On souhaite à présent connaître la vitesse de convergence de la suite.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p > n$. En utilisant le résultat de la question 4a, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_{n+1}^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2}$$

(b) En déduire que :

$$S_{p+1} - S_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1} \leqslant S_p - S_n$$

(c) Justifier alors très proprement que :

$$\ell - S_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ell - S_n$$

(d) Prouver alors que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

(e) En déduire un équivalent de $\ell - S_n$.

Partie 2 : calcul de la limite

Dans cette partie, on pose pour tout réel t, $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et on définit la fonction φ sur $[0;\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \ \text{ et } \ \forall t \in]0;\pi] \ , \ \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

1. Etude de la fonction φ.

(a) Montrer que φ est continue sur $[0;\pi]$.

(b) En calculant la limite d'un taux d'accroissement, montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

(c) Justifier que φ est dérivable sur $]0;\pi]$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]0;\pi]$.

(d) Prouver que φ' est continue en 0.

(e) En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

2. Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$.

3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in]0;\pi]$ la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

4. En déduire une constante λ (que vous déterminerez) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \;,\; \forall t \in]0;\pi] \;,\; \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \lambda$$

5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^\pi g(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Indication : on pourra utiliser sans démonstration le fait que toute fonction continue sur un segment (donc ici $[0,1]$) est bornée.

6. Montrer alors que la suite (S_n) de la partie 1 converge vers $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie 3 : irrationnalité de π^2

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé.

(a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e_k x^k$.

(b) Montrer que pour tout entier $k < n$ ou $k > 2n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$.
(*On pourra démontrer que la dérivée p-ième de $x \to x^k$ est égale à $x \to A_p^k x^{k-p}$ si $p \leq k$ et 0 sinon*)

(c) Montrer que si $n \leqslant k \leqslant 2n$, alors $f_n^{(k)}(0) = e_k \times \dfrac{k!}{n!}$.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(e) Exprimer pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(1-x)$ en fonction de $f_n(x)$.

(f) En déduire que pour tout entier k, $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

On veut montrer que π^2 est irrationnel : pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ avec a et b deux entiers naturels non nuls.

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$F_n(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right) = b^n \sum_{k=0}^{n} \pi^{2n-2k} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$$

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x) \quad \text{ et } \quad A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(t)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

(b) Montrer que pour tout réel x, $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

(c) En déduire que $A_n = F_n(1) + F_n(0)$ et donc que $A_n \in \mathbb{Z}$,

3. On pose alors, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

(a) En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $u_n = O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

(b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{4}$.

(c) Etablir que : $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(d) Montrer alors que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 < A_n < 1$.

(e) En déduire que π^2 est irrationnel puis que π l'est aussi.