Devoir Surveillé 5. 4h.

Vendredi 8 janvier

La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.
RAPPEL :
- **Résultats pas encadrés = -1 point**
- **A chaque fois que je juge votre copie sale : -0,25 point**
- **Pour chaque page qui contient au moins 3 fautes d'orthographe : -0,25 point**

Questions de cours

1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Donnez les définitions de l'injectivité de f et de la surjectivité de g. Démontrez que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Démontrez, en revenant à la définition de la limite, que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ' alors $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Enoncez et démontrez le théorème des gendarmes.
4. Enoncez le théorème de la limite monotone.
5. Soit (u_n) une suite qui converge vers 0. Donnez un équivalent des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$:
$$\cos(u_n) - 1, \quad e^{u_n} - 1, \quad \sin(u_n), \quad \ln(1 + u_n), \quad \frac{1}{1 + u_n} - 1$$
6. Exprimez tous les équivalents de la question précédente avec des petits "o".

Exercice 1

Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation cartésienne : $x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$ dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminez l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et précisez sa nature et ses éléments caractéristiques. Puis on fera un dessin précis.

Exercice 2

1. (a) Sur quel intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction $x \to \arctan\sqrt{x}$ est-elle dérivable ? On attend une réponse justifiée très précisément. Donnez l'expression de sa dérivée.
   (b) Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :
$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1+x)} \qquad (E_1)$$
2. (a) Linéarisez $x \to \cos^3(x)$.
   (b) Déterminez les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y'' + y = \cos^3(x) \qquad (E_2)$$

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$. D'après la propriété de la borne inférieure, A et B admettent donc des bornes inférieures.

1. Démontrez que, si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A$.
2. Justifiez que $A \cup B$ admet une borne inférieure et démontrez que
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$
3. On suppose que $A \cap B$ admet une borne inférieure. Démontrez que
$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B)$$
A-t-on une égalité ? (on attend une réponse justifiée)

Exercice 4

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n}), \ \ a_n = u_{n^2}, \ \ b_n = u_{n^2+3n}$$
Attention les n^2 et les $n^2 + 3n$ sont en indice dans les expressions de a_n et b_n et E désigne la partie entière.

1. Montrez que la suite (u_n) est bornée.
2. Simplifiez l'expression de a_n et précisez la limite de (a_n).
3. Si jamais la suite (u_n) convergeait, quelle serait sa limite ?
4. (a) Établir que, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$
   (b) En déduire une expression simplifiée (sans partie entière) de b_n.
   (c) Pour une suite (α_n) qui tend vers 0, rappelez un équivalent de $\sqrt{1+\alpha_n} - 1$ quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminez la limite de la suite (b_n).
5. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sqrt{u_n}$.

On note $f : x \to 1 - \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifiez la bonne définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduit-on au passage ?

2. (a) Montrez que f possède un unique point fixe α dans $[0, 1]$ dont on précisera la valeur exacte.
   (b) Montrez précisément que $u_0 \leq \alpha \leq u_1$.
   (c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

3. (a) Montrez que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On notera leurs limites respectives ℓ et ℓ'.

4. (a) Déterminez les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$. (*On pourra montrer que ses points fixes sont racines d'un polynôme de degré 4 qui possède deux racines évidentes.*)
   (b) Déterminez ℓ et ℓ'.

5. Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.