# Devoir Surveillé 3. 4h.

Vendredi 6 novembre

---

**La qualité de présentation de la copie ainsi que celle de l'argumentation seront prises en compte dans l'évaluation. Tout résultat non encadré ne sera pas comptabilisé. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.**

---

## Questions de cours

1. Donner la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace.
2. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera en donnant, quand elles sont justes, une démonstration et, quand elles sont fausses, un contre-exemple. Toute réponse non justifiée ne sera pas comptabilisée.
   (a) Une application qui n'est pas injective est surjective.
   (b) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement décroissante est injective.
   (c) L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & z^2 \end{array} \right.$ est surjective.
   (d) Pour trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace, on a $\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

## Exercice 1

On définit le polynôme à coefficients complexes $P(X) = \dfrac{1}{2i}\big((X+i)^5 - (X-i)^5\big)$.

1. Donner les expressions des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
2. A l'aide de ces racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déterminer les racines du polynôme $P$. (*c'est-à-dire les solutions $z$ de l'équation $P(z) = 0$*). Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
3. Vérifier que le polynôme $P$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec $a, b$ et $c$ des réels que l'on calculera. Déterminer alors une autre écriture des racines de $P$.
4. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

## Exercice 2

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les trois points $A = (2, 1)$, $B = (2, -\sqrt{3})$ et $C = (-1 - \sqrt{3}, 1)$.

1. Déterminer les équations cartésiennes des bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
2. En déduire les coordonnées du centre $I$ du cercle inscrit dans le triangle $ABC$.
3. Déterminer l'équation cartésienne du cercle inscrit dans le triangle $ABC$.

## Exercice 3

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\Delta$ passant par l'origine $O$ dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(3, 2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + 2y - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à $\Delta$.

**Exercice 4**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x$ **réel** par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.

1. Expliquer pourquoi $f$ est bien définie.
2. L'application $f$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) est-elle injective ? surjective ?
3. On considère $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par $f$, c'est-à-dire $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'image de $f$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 différents de $-1$, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

**Exercice 5**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation :
$$y' - \mathrm{th}(x)y = \frac{1}{2} \tag{E1}$$
.
2. Donner, selon les valeurs du paramètre réel $a$, les solutions à valeurs réelles de l'équation :
$$y'' - 2ay' + y = e^x \tag{E2}$$

**Exercice 6**

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t = 1 \tag{$*$}$$

1. **Préliminaires**
Prenons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. on pose $g : x \to 2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t + 1$.
   (a) En utilisant une formule de trigonométrie montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Calculez $g(0)$ et $g'(0)$.
   (b) Si $f$ est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que $g'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g''$.
   (c) En déduire que $g$ est alors solution d'une équation différentielle du second ordre avec un second membre qui dépend de $f$ ou de sa dérivée.
2. **Analyse**
Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution du problème. C'est-à-dire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie $(*)$.
   (a) En utilisant les préliminaires dites pourquoi $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
   (b) Toujours avec les préliminaires, montrer que $f$ vérifie une équation différentielle du second ordre.
   (c) Donner l'expression de $f$.
3. **Synthèse**
On reprend $f$ trouvée dans la partie analyse. Il faut vérifier qu'elle est bien solution du problème.
   (a) Justifier précisément que $f$ est continue.
   (b) On pose $h = g - f$ où $g$ est la fonction définie dans les préliminaires. Calculer $h(0)$ et $h'(0)$.
   (c) Montrer que $h$ vérifie l'équation différentielle : $h'' + h = 0$.
   (d) Calculer $h$ et en déduire que $f$ est bien solution du problème.
4. **Conclure.**