Mathématiques

PCSI1 : DS n^o 2

Vendredi 02/10/2009 // Durée : 4h00

Le sujet comporte au total quatre exercices indépendants ainsi que des questions de cours.
Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements.
Les résultats finaux doivent être encadrés. Un résultat final non encadré ne sera pas considéré.
Le barème est donné à titre indicatif. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Chaque exercice doit être rendu sur une copie différente !

Questions de cours (3,5 points)

1. Donner, sans démonstration, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions : arcsin, Argth et th. Donner, toujours sans démonstration, une primitive des fonctions : $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \to -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Donner, sans démonstration, les équations polaires d'une droite et d'un cercle passant par l'origine du repère ainsi que celle d'une droite ne passant par l'origine, en précisant bien toutes les notations.
3. Soient M un point du plan et D une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Donner et démontrer la formule donnnant la distance entre M et D.

Exercice 1 (3,5 points)

On définit le polynôme à coefficients complexes $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right)$.

1. Donner les expressions des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2. A l'aide de ces racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déterminer les racines du polynôme P. (*c'est-à-dire les solutions z de l'équation* $P(z) = 0$). Vérifier qu'elles sont toutes réelles.

3. Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec a, b et c des réels que l'on calculera. Déterminer alors une autre écriture des racines de P.

4. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2 (4,5 points)

Soit un réel $\theta \in]0; 2\pi[$. On définit la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ z_{n+1} = e^{i\theta} z_n + \frac{1}{2}(1 - e^{i\theta})$$

1. On appelle M_n et M_{n+1} les points d'affixe respective z_n et z_{n+1}. Déterminer précisément les éléments caractéristiques de la transformation géométrique qui envoie M_n sur M_{n+1}.

2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = z_n - \dfrac{1}{2}$, est une suite géométrique.

3. En déduire directement, pour tout entier $n \geq 0$, une expression de w_n puis de z_n en fonction de n (et de θ). Que vaut le module de z_n ?

3. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la somme :

$$S_n(\theta) = z_0 + z_1 + \ldots + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$

Montrer que pour tout entier n, on a :

$$S_n(\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{e^{in\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $T_n(\theta)$ la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire :

$$T_n(\theta) = \frac{S_n(\theta)}{n+1} = \frac{z_0 + z_1 + \ldots + z_n}{n+1}$$

Montrer qu'on a, pour θ fixé,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|T_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = 0$$

On dit que la suite complexe $(T_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

5. On fixe un entier n. Déterminer la limite de $T_n(\theta)$, lorsque θ tend vers zéro : $\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta)$.

(*On admettra la limite suivante :* $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$.)

6. Calculer et comparer les deux quantités :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\theta\to 0} T_n(\theta)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to 0}\left(\lim_{n\to+\infty} T_n(\theta)\right)$$

Qu'en conclure ?

Exercice 3 (3,5 points)

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Exprimer, lorsque cela a un sens, $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. *On distinguera plusieurs cas, suivant les valeurs du réel x et on pourra auparavant rappeler ou retrouver une relation entre* $\arctan(t)$ *et* $\arctan(\frac{1}{t})$ *lorsque* $t \neq 0$.

4. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculer lorsque cela a un sens $f'(x)$.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Bonus : *préciser l'allure de la courbe aux voisinages des points exclus de l'ensemble de définition.*

6. A l'aide de la question 4, déduire une expression simplifiée de f sur chacun des intervalles I_k dont la réunion est $\mathcal{D}_f$.

Exercice 4 (5 points)

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_n(x) = xe^x - nx$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g_n la fonction définie pour tout réel x par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Etudier les variations de g_n et dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n et que de plus, $\alpha_n \geqslant 0$. Que vaut α_1 ?

4. Etablir que $\alpha_n = \ln\left(\dfrac{n}{1+\alpha_n}\right)$ et que $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \ln n$.

5. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ? Soyez le plus précis possible.

6. Déterminer, à l'aide de la question précédente, le signe de $g_n(\ln(\sqrt{n}))$.

7. En déduire que : $\alpha_n \geqslant \dfrac{1}{2}\ln n$.

8. Déterminer, si elles existent, les limites des suites (α_n) et $\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$.

Partie B

1. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. On montrera que $f(\alpha_n) = \dfrac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

3. Montrer que $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote $\mathcal{D}_n$ que vous déterminerez, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{D}_n$.

4. Déterminer le (ou les) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_n$ et de l'axe des abscisses, et préciser la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à cet axe.

5. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

6. On admet que $\alpha_2 \simeq 0,37$ et que $f_2(\alpha_2) \simeq -0,2$. Tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur le même graphique, en mettant en évidence les résultats des questions précédentes. On précisera également les tangentes à ces deux courbes au point d'abscisse 0.

7. Calculer l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_2$ et l'axe des abscisses (sous-entendu lorsque $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de l'axe des abscisses).