Devoir Surveillé 1. 3h.

Vendredi 18 septembre

Des points seront réservés à la qualité de présentation de la copie. Tout résultat non encadré ne sera pas comptabilisé. Aucun document ni aucune calculatrice autorisé.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire. On traitera aussi le cas d'égalité.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité et leur somme ? On démontrera le résultat sur la somme.
3. Calculer les racines carrées du complexe $1+3i$.

Exercice 1. On pose $h : x \to \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{E}$ de la fonction h.
2. Montrer que h est dérivable sur $\mathcal{E}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de h.

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$. On pose $f : x \to e^{\lambda x}$ et on considère l'équation (E) suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \tag{E}$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. Réciproquement, montrer que si x est solution de (E) alors $f(x) = x$.
   (*On pourra considérer* $f \circ f$)
4. Soit la fonction $g : x \to f(x) - x$. Quel est le lien entre les solutions de (E) et g ?
5. Étudier les variations de la fonction g.
6. En déduire, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 3. On pose $\text{sch} : x \to \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction sch et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction sch et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que la restriction de sch à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque. On note argsch cette application.
4. Donner l'ensemble de définition de argsch ainsi que l'ensemble sur lequel elle est continue et son sens de variation. Tracer les courbes représentatives des fonctions sch et argsch.
5. Expliciter la fonction argsch.

Il y a un verso...

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

1. Rappeler sans démonstration la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$. (*on pourra poser* $\theta = \arctan(x+1) - \arctan(x)$)
3. En déduire la valeur de S_n.
4. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

* * *

Une petite charade (hors barême) :

- Mon premier vient d'un certain π.
- Mon deuxième est un possessif.
- Mon troisième est un insecte soporifique.
- De-ci.
- Les enfants ne disent pas "sphère" mais mon cinquième.

Vous ne pourrez qu'être d'accord avec mon tout ! (surtout après ce devoir)