Devoir Maison 9

A rendre le lundi 15 février individuellement

Partie 1 : $x^2 + x = 1$

1. Donnez les deux solutions réelles de l'équation $x^2+x=1$. On notera α l'unique solution positive. Sachant cela on va essayer de mettre en place une méthode pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{5}$.
2. Montrez que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$$
Montrez que f stabilise $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que donc (u_n) est bien définie.
4. Simplifiez $f(\alpha)$.
5. Montrez en utilisant l'inégalité des accroissements finis (on justifiera bien toutes les hypothèses et proprement) que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$$
6. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ et déterminez la limite de la suite (u_n).
7. Calculer à partir de quel entier n, u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.
8. Ecrire une procédure Maple qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite u_n. Servez-vous en pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-5} près.

Partie 2 : $x^3 + x^2 + x = 1$

1. Montrez que l'équation $x^3+x^2+x=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note β cette solution.
2. Montrez que $\beta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
3. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = g(u_n)$$
Montrez que g stabilise $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et que donc (v_n) est bien définie.
4. Montrez en utilisant l'inégalité des accroissements finis que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |v_{n+1} - \beta| \leq \frac{135}{169}|v_n - \beta|$$
5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |v_n - \beta| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$ et déterminer la limite de la suite (v_n).
6. Calculer à partir de quel entier n, v_n est une approximation de β à 10^{-5} près. Comment expliquez-vous cette différence avec la partie précédente ?

Partie 3 : généralisation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^p + x^{p-1} + \ldots + x^2 + x = 1$

1. Montrez que cette équation admet une unique solution positive. On note α_p cette solution.
2. Montrez que $\alpha_p \in]0, 1]$.
3. Etablir la relation : $\alpha_p(1 - \alpha_p^p) = 1 - \alpha_p$.
4. Montrez que la suite $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge. On note ℓ sa limite.
5. Démontrez que la suite $(\alpha_p^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et en déduire ℓ.
6. On note $\alpha_p = \dfrac{1}{2}(1 + \varepsilon_p)$
   (a) En observant que $(1 + \varepsilon_p)^{p+1} = 2^{p+1}\varepsilon_p$, établir la relation :
   $$(p + 1)\varepsilon_p \ln(1 + \varepsilon_p) = (p + 1)\varepsilon_p \ln(2) + \varepsilon_p \ln(\varepsilon_p)$$
   (b) Déterminez alors la limite de $(p + 1)\varepsilon_p$ pour $p \to +\infty$ puis celle de $(1 + \varepsilon_p)^{p+1}$
   (c) En déduire un équivalent simple de ε_p pour $p \to +\infty$.