Devoir Maison 8

A rendre le mercredi 20 janvier individuellement

Exercice 1

Trouvez un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

1) $\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$ 2) $\ln(n+1)-\ln(n+2)$ 3) $\sqrt{1+e^{-n}}-\cos(e^{-n})$

4) $\sqrt[8]{1+\frac{1}{2^n}}-2e^{\sin\frac{1}{n}}+\cos\frac{2}{n}$

Exercice 2

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, montrez que l'équation $e^{nx}=e^n+e^x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
2. (a) Montrez que : $\forall n\geq 2,\ x_n\geq 1$.
   (b) Soit $\varepsilon>0$. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{n(1+\varepsilon)}-e^n\right)$ et en déduire qu'à partir d'un certain rang $x_n<1+\varepsilon$.
   (c) Conclure sur la limite de la suite (x_n).
3. On pose $\delta_n=x_n-1$, pour tout $n\geq 2$.
   (a) A partir d'une expression de $n\delta_n$, déterminer un équivalent simple de δ_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que : $e^{x_n-n}\underset{n\to\infty}{=}e^{-n}e+o(e^{-2n})$.
4. (a) Montrez que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$: $0\leq\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\leq\dfrac{x^3}{3}$
   (b) En déduire que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de limite nulle :
   $$\ln(1+u_n)\underset{n\to\infty}{=}u_n-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$$
   (c) Montrer enfin que : $x_n\underset{n\to\infty}{=}1+\dfrac{e^{-n}e}{n}-\dfrac{e^{-2n}e^2}{2n}+o\left(\dfrac{e^{-2n}}{n}\right)$

Exercice 3

Notons c la vitesse de la lumière. Le moins que l'on puisse dire c'est que $c>0$. Notons aussi $I=]-c,c[$. Pour additionner des vitesses x et y proches de c la théorie de la relativité nous dit qu'il faut utiliser la formule de Lorentz :

$$\forall(x,y)\in I^2,\ \ x\star y=\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$$

1. Montrez la célèbre loi qui dit qu'aucune vitesse ne peut dépasser celle de la lumière. Mathématiquement cela revient à montrer que la loi $\star$ est une loi de composition interne sur I.
2. Montrez que $(I,\star)$ est un groupe commutatif.