PCSI 1
2009-2010

Devoir Maison 7

Théorème de Césaro, variantes et applications.

A rendre le lundi 4 janvier 2010. Individuellement.

1 Variantes et généralisations du théorème de Césaro

1. Rappeler le théorème de Césaro. Refaites la démonstration chez vous (pas sur la copie) tout seul sans regarder la correction vue en TD.

2. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer, en utilisant un argument de série télescopique, que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. *Ce résultat s'appelle généralement le* ***lemme de l'escalier***.

3. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ tend aussi vers $+\infty$. *(On écrira la définition de la limite de (u_n) ce qui donne un certain rang N puis on séparera en deux la somme S_n avec ce N ; c'est la même idée que pour Césaro !)*

4. (Pour ceux qui se sentent en confiance !) Soient (u_n) une suite réelle et (λ_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = +\infty.$$
Démontrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\Big) = \ell$$

2 Quelques applications

1. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ. *(On séparera le cas $\ell > 0$ et $\ell = 0$. Pour $\ell > 0$, on pourra s'intéresser à la suite $(\ln u_n)$ et pour $\ell = 0$ on reviendra à la définition en ε de la limite)*

   (b) En déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :
$$(\sqrt[n]{n}), \quad \Big(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\Big), \quad \Big(\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})\Big)^{\frac{1}{n}}\Big).$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & > & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+u_n^2}. \end{array}\right.$$

(a) Montrer que (u_n) converge vers 0.

On va essayer d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$.

(b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (w_{n+1} - w_n) = 2.$$

(c) En déduire en utilisant le lemme de l'escalier que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

$\star\star\star$ **Joyeuses fêtes !!** $\star\star\star$