Devoir Maison 6

A rendre le jeudi 10 décembre individuellement ou à deux maximum

---

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{C}_1$ la conique d'équation cartésienne : $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 16x - 18y - 9 = 0$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}_1$ ansi que suffisamment de ses paramètres pour pouvoir la dessiner dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (*Au cas où vous ne l'auriez pas compris il faut faire le dessin!!*)

2. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{C}_2$ définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \dfrac{2}{\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2}}$. Déterminer $\mathcal{C}_2$ et faites un dessin en le justifiant.

Exercice 2.

On considère les deux ensembles suivant :

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2 \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour chacun de ces deux ensembles, dites si leurs bornes supérieures et inférieures existent et, s'ils ont des plus petits et plus grands éléments. Déterminer la valeur de celles et ceux qui existent.

Exercice 3.

Il s'agit ici de démontrer le théorème de Tarski dont l'énoncé est le suivant :

> **Théorème** Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On suppose que toute partie de E possède une borne supérieure dans E. Alors toute application croissante de E dans E possède un point fixe.

La croissance d'une fonction f signifie : $\forall (x,y) \in E^2, \ \big(x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)\big)$ et un point fixe de f est un élément x de E telque $f(x) = x$.

1. On fixe un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ et on suppose que toute partie de E possède une borne supérieure. Soit f une application croissante de E dans E.
   On pose $A = \{x \in E \ ; \ x \preccurlyeq f(x)\}$ et on note M la borne supérieure de A, qui existe par hypothèse.
   (a) Montrer que M est le plus grand élément de A.
   (b) Montrer que $f(M)$ appartient à A et conclure la démonstration du théorème de Tarski.

2. Comme application du théorème de Tarski redémontrer le résultat vu en TD : toute application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ possède un point fixe.