Devoir Maison 3

A rendre à 2 ou 3 le lundi 12 octobre

Dans ce problème, on identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ au plan géométrique $\mathbb{R}^2$. Les angles considérés seront toujours orientés. On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On rappelle la définition du birapport, $[a, b, c, d]$, de quatre nombres complexes a, b, c, d :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-b}{c-b} \div \frac{a-d}{c-d} = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$$

On fixe une fois pour toutes quatre points **distincts** A,B,C et D du plan, d'affixes respectives a, b, c et d dans $\mathbb{C}$.

L'objet de ce problème est de montrer que A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport $[a, b, c, d]$ est réel. On en déduira le théorème des angles inscrits.

1. Condition nécessaire

1. Donner, sans démonstration, une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{a-b}{c-b}$. En déduire une condition simple pour que les points A, B et C soient alignés.
2. Montrer que, si les points A, B, C et D sont alignés, alors $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.
3. On suppose, pour cette seule question, que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$, de centre Ω, dont l'affixe est notée ω, et de rayon $r > 0$. Montrer que $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$. (*On pourra introduire des arguments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des complexes $a-\omega, b-\omega, c-\omega, d-\omega$*)
4. Déduire de ce qui précède que, si les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques, alors $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})\ [\pi]$

2. Condition suffisante : quelques cas particuliers

5. Montrer que, si a, b, c sont réels et si $[a, b, c, d]$ est aussi réel, alors d est réel.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on note $f(z) = i\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

6. Calculer la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de z, et en déduire l'équivalence suivante :
$$z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$$
7. Si a, b, c et d sont différents de 1, montrer que $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$.
8. On suppose que a, b, c, d sont tous différents de 1. Déduire des questions précédentes que, si a, b, c appartiennent à $\mathbb{U}$ et si le birapport $[a, b, c, d]$ est réel, alors $d \in \mathbb{U}$.
9. Expliquer que le résultat de la question précédente est encore valable si a, b, c ou d vaut 1.

3. Condition suffisante : cas général

10. Supposons que A, B, C sont alignés. Montrer que, si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, alors le point D est également sur la même droite.

11. On suppose désormais les points A, B, C non alignés. Démontrer qu'il existe un unique point Ω équidistant de A, B, C. (*On pourra faire une démonstration géométrique*)

    On note ω l'affixe de Ω et $r = |a - \omega|$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \dfrac{z - \omega}{r}$.

12. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z - \omega| = r\}$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \Gamma \iff g(z) \in \mathbb{U}$$

13. Vérifier que $[g(a), g(b), g(c), g(d)] = [a, b, c, d]$.

14. En déduire que, si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, alors les points A, B, C, D sont sur un même cercle.

On a ainsi prouvé, dans tous les cas, que :

$$[a, b, c, d] \in \mathbb{R} \Longrightarrow A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés}$$

4. Théorème des angles inscrits

15. Achever la démonstration du théorème des angles inscrits en montrant, à l'aide des résultats de la partie précédente, que si $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \; [\pi]$, alors les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.