Devoir Maison 2

A rendre à 2 ou 3 Lundi 28 septembre

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble D_λ des points M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ tels que

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y + a(1+\lambda)^2 = 0$$

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, D_λ est une droite du plan.

Partie 1 : Étude du cas $a = 0$

On suppose donc dans toute cette partie que $a = 0$.

2. Montrer qu'il existe un point qui appartient à toutes les droites D_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer la droite D_0.
4. On pose $\lambda = \tan \dfrac{t}{2}$ avec $t \in]-\pi, \pi[$. Donner une équation normale de la droite D_λ.
5. Soit M de coordonnées (α, β) dans $\mathcal{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Combien passe-t-il de droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ par M ?
6. Si M est sur l'axe (Oy) et $M \neq O$, combien passe-t-il de droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ par M ?

Partie 2 : Étude du cas général $a \neq 0$

On suppose dans toute la suite que $a \in \mathbb{R}^*$.

7. Soient λ et μ deux réels.
   (a) Montrer que les droites D_λ et D_μ sont parallèles si et seulement si $(\lambda = \mu$ ou $\lambda\mu = -1)$.
   (b) En déduire l'équivalence : $(D_\lambda = D_\mu) \Longleftrightarrow (\lambda = \mu)$.
8. Soit M de coordonnées (α, β) dans $\mathcal{R}$ avec $\alpha \neq a$. Montrer qu'il passe au moins une droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ par M si et seulement si $\alpha^2 + (\beta + a)^2 - a^2 \geq 0$.
9. En déduire qu'il existe un cercle C_a (de centre I_a à préciser) passant par O, une droite Δ et un point A appartenant à Δ (dont on précisera les coordonnées) tels que
   - si $M \in C_a$ privé de A il passe une unique droite D_λ par M.
   - si M est à l'extérieur du cercle C_a et M n'appartient pas à Δ, il passe deux droites distinctes de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ par M.
   - si M est sur Δ privée de A, il passe une unique droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ par M.
   - par A, il ne passe aucune droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

   Que se passe-t-il pour les points M situés à l'intérieur du cercle C_a ?
10. Montrer que, pour tout réel λ, la droite D_λ est tangente à C_a.

Partie 3 : Deux petites questions indépendantes du reste

11. Donner une équation polaire de C_a.
12. Pour quelles valeurs de λ la droite D_λ ne passe-t-elle pas par O ? Dans ce cas, montrer que si on pose $\lambda = \tan \dfrac{t}{2}$ avec $t \in]-\pi, \pi[$ et t différent d'un certain t_0 à préciser, une équation polaire de D_λ est $r = -a\dfrac{1+\sin t}{\cos(\theta - t)}$. (*On pourra commencer par en chercher une équation normale.*)
13. On prend $a = 2$ et $t = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer λ, puis faire un dessin sur lequel on placera notamment $C_a, A, \Delta, D_\lambda$.

Partie 4 : Étude du lieu des points où il passe deux droites perpendiculaires de la famille

14. Soient u et v deux réels, on note $S = u+v$ et $P = uv$. Exprimer $(1-u^2)(1-v^2)+4uv$ en fonction de S et P.
15. Montrer que les points où il passe deux droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ perpendiculaires entre elles sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.