Devoir Maison 13

A rendre le jeudi 20 mai à deux ou trois maximum

Problème 1. Carrés magiques

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille 3, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ satisfaisant, pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$,

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} = s$$

Une telle matrice est appelée un **carré magique** : la somme de chacune de ses lignes est égales à la somme de chacune de ses colonnes qui sont égales à la somme de chacune des deux diagonales. On va décrire l'ensemble $\mathcal{C}$ des carrés magiques de taille 3.

1. **Préliminaires**
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le but du reste du problème est de trouver la dimension et une base de $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ est stabilisé par la transposition.
2. **Les carrés magiques antisymétriques**
   (a) On suppose que A est un carré magique et qu'elle est antisymétrique. Montrer que la quantité s définie dans l'introduction vaut 0.
   (b) Montrer que l'ensemble des carrés magiques antisymétriques est
   $$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
3. **Les carrés magiques symétriques**
   (a) On considère un carré magique A avec cette fois A symétrique. Soit s_A la quantité de l'introduction associée au carré magique A. Montrer que la matrice $B = A - \frac{s_A}{3}U$ est un carré magique, où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Exprimer la matrice B à l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) Décrire l'ensemble des carrés magiques symétriques.
4. **Conclusion**
   (a) Re-démontrer $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que l'ensemble des carrés magiques est un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est
   $$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Problème 2. <u>Méthode de Newton</u>

La méthode de Newton est une méthode classique de calcul approché d'un zéro d'une fonction qui, quand elle peut être utilisée, est très puissante.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$. On suppose que f s'annule en un unique point z dans l'intérieur de I et que f' ne s'annule pas sur I. On va approcher z par une suite définie par récurrence puis évaluer la vitesse de convergence de cette suite.

1. On note F la fonction qui à tout $x \in I$ associe l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente de f en x. Justifier que F est bien définie sur I et montrer que

$$\forall x \in I\ ,\ F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2. Comme z est dans l'intérieur de I, il existe $\alpha > 0$ tel que $[z-\alpha, z+\alpha] \subset I$.
   (a) Montrer que $F(z+h) - z \underset{h\to 0}{=} \dfrac{f''(z)}{2f'(z)}h^2 + o(h^2)$. On pourra utiliser après les avoir établis les DL de f et f' en z.
   (b) En déduire l'existence d'un réel $\beta \in]0,\alpha]$ tel que, pour tout $x \in [z-\beta, z+\beta]$
   $$|F(x) - z| \leq \frac{|x-z|^2}{10\beta}$$
   (c) En déduire que F stabilise le segment $[z-\beta, z+\beta]$.
   (d) Soit $x_0 \in [z-\beta, z+\beta]$. Grâce au résultat de la question précédente, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par x_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$ est bien définie.
      i. Représenter graphiquement le principe de construction des termes de la suite (x_n).
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - z| \leq \dfrac{|x_n - z|^2}{10\beta}$.
      iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - z| \leq \dfrac{\beta}{10^{2^n-1}}$.
      iv. En déduire que la suite (x_n) converge vers z le zéro de f.
      v. A cause de la majoration en 10^{-2^n}, la convergence de (x_n) est dite quadratique. Comment le nombre de décimales exactes de z évolue-t-il à chaque étape de l'algorithme ? Comment évoluerait-il si la majoration était de la forme 10^{-n} (convergence géométrique) ?
3. On suppose de plus f strictement croissante et <u>convexe</u> sur I et on pose $D = I \cap [z, +\infty[$.
   (a) Soit $x \in D$, montrer l'inégalité $z \leq F(x) \leq x$. On pourra utiliser le résultat sur les fonctions convexes : le graphe de f est au dessus de sa tangente en x.
   (b) Soit $x_0 \in D$. On vient de montrer en a) que $F(D) \subset D$, donc on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers z.
   (c) Pourquoi ce résultat avec cette hypothèse de convexité peut être utile, alors qu'on a démontré un résultat similaire dans la question 2) ?
4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'on peut utiliser la méthde de Newton avec $f : x \to x^2 - a$ pour approcher $\sqrt{a}$. Calculer la fonction F correspondante.