Devoir Maison 12

A rendre le lundi 3 mai à deux ou trois maximum

Exercice 1 **Images et noyaux itérés d'un endomorphisme**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$ et $N_p = \mathrm{Ker}\,(f^p)$. ($f^p$ est la composée de f avec elle-même p fois)

1. Montrer que la suite $(I_p)_{p\geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion tandis que $(N_p)_{p\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés.
   Montrer que $\forall s \geq r, \quad I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 2

Calculer l'intégrale et les primitves suivantes :

$$1) \int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x \quad 2) \int x^3\cos(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \quad \int x^3\sin(x)\mathrm{d}x$$

$$3) \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \qquad 4) \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}} \quad 5) \int \sqrt{e^x+1}\mathrm{d}x$$

pour les primitives on précisera les intervalles de validité.

Exercice 3 **Formule de Wallis**

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

4. La formule de Wallis.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$

b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$