Devoir Maison 11

A rendre le lundi 29 mars à deux ou trois maximum

Exercice 1

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n ainsi construit est appelé le $n^{\text{ième}}$ **polynôme de Tchebychev**.

1. (a) Montrer que T_n est de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer les coefficients de degré n et $(n-1)$ de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel :
   $$\forall\theta \in \mathbb{R},\quad P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dériver deux fois le résultat obtenu en 2.(a), puis en déduire que $\cos\theta$ est racine de $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Enfin en déduire que T_n est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$. On pourra les chercher sous forme de cosinus.
   (b) En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs ordres de multiplicité.
   (c) En déduire la décomposition de T_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. On note f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \to & (X^2-1)P'' + XP' \end{array}\right.$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On suppose que $f(P) = \lambda P$. Montrer qu'alors $\lambda = (\deg P)^2$.
   (c) En déduire que $\ker(f - n^2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}) = \mathrm{Vect}\,(T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2

On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = -y = z\}$

1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $p(x, y, z)$.

Exercice 3

1. Déterminer le développement limité en $\dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 de la fonction $x \to \arctan(2\sin x)$.
2. Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\mathrm{ch}x) - \ln(\cos x))^2}{\sqrt{\mathrm{ch}x} + \sqrt{\cos x} - 2}$