Devoir Maison 10

A rendre le lundi 8 mars à deux ou trois maximum

Exercice 1

Déterminez à l'aide du théorème des accroissements finis la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Exercice 2 **Théorème de Rolle généralisé**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

(*On pourra traduire l'énoncé par un système de 3 équations avec des inconnues entières, puis utiliser l'exercice 10 de la feuille de TD du chapitre 15 pour résoudre ce genre d'équations. . .*)

Exercice 4 (Les nombres de Mersenne)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle nombre de Mersenne d'ordre n et on note M_n l'entier $M_n = 2^n - 1$.

1. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

2. Soit p un nombre entier tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que le nombre $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme la somme de ses diviseurs stricts (par exemple 6 est parfait car ses diviseurs stricts sont $1, 2, 3$ et $6 = 1 + 2 + 3$).

3. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est un nombre premier.